L'épreuve porte sur un thème général : les oscillateurs, sous de multiples aspects

La première partie de l'épreuve s'organise autour d'une progression pédagogique où figurent des questions de **cours à traiter,** de niveaux variés (Terminale, PCSI et PC-PC*) et des exercices d'application aux niveaux précédents, de type **travaux dirigés**, à résoudre ou à **construire**.

La deuxième partie propose une démarche de type **TP-Cours** en électronique aux divers niveaux précités (Terminale, enseignement de spécialité, PCSI, PC-PC*), à propos d'un oscillateur de relaxation particulier.

De nombreuses questions d'ordre pédagogique émaillent l'épreuve : on veillera à ne pas les négliger !

PREMIÈRE PARTIE

1 A propos d'oscillateurs élémentaires

Questions de cours (Terminale S)

1 a) Établir la formule donnant la période T_e des oscillations verticales d'un pendule élastique vertical (k, l_0, m) plongé dans le champ de pesanteur vertical uniforme $g\,\mathbf{e_z}$.

1 b) Rappeler sans démonstration la formule donnant la période T_g des petites oscillations du pendule simple de masse m, de longueur l dans le champ de pesanteur vertical uniforme $g\,\mathbf{e_z}$.

1 c) Quelles raisons physiques de fond invoqueriez vous pour répondre à un élève qui vous interrogerait à propos de l'indépendance surprenante a priori, de T_e vis à vis de g et de T_g vis à vis de m ?

2 Oscillateur linéaire spatial isotrope

Questions de cours (PCSI)

On appelle oscillateur linéaire spatial isotrope (OLSI), une masse ponctuelle de position galiléenne M, soumise à un champ de force $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\,\mathbf{r} = -k\,\mathbf{OM}$ où k est un réel positif et O un point fixe galiléen.

2 a) Que répondriez vous à la question d'élève suivante : « le pendule élastique vertical que l'on a étudié en Terminale peut-il être considéré comme un OLSI ? »

2 b) Quel théorème vous parait le plus indiqué pédagogiquement pour démontrer que la trajectoire galiléenne de l'OLSI est généralement plane, éventuellement rectiligne ?

2 c) Quel autre exemple célèbre et historique ne manqueriez vous pas d'évoquer devant vos élèves à propos du théorème du 2 b) ?

2 d) Établir la nature précise de la trajectoire galiléenne de l'OLSI quand elle est plane ?

2 e) Quel est le temps caractéristique T_0 de cette trajectoire ?

2 f) Quelles différences vous paraissent pédagogiquement intéressantes à signaler entre la trajectoire de Hooke et celle fermée du problème de Kepler ?

Construction d'un exercice de travail dirigé (PCSI)

2 g) On rappelle le modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène isolé.
Un nuage sphérique uniformément chargé, de charge totale +e, de centre O, de rayon a, est fixe galiléen.
Un électron de masse m, ponctuel de position galiléenne M, de charge -e peut s'y mouvoir.
Proposer l'énoncé d'un exercice fondé sur le modèle de Thomson, comportant des questions pédagogiquement fortes (deux ou trois au maximum), illustrant les notions précédentes.

Construction d'un exercice de travail dirigé (PC, PC*)

2 h) On considère un champ de forces irrotationnel, indépendant du temps, de type $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ s'exerçant sur une masse ponctuelle m.
Proposer l'énoncé d'un exercice fondé sur l'hypothèse précédente, comportant des questions pédagogiquement fortes (deux ou trois au maximum), amenant de façon générale la notion d'OLSI.

3 Phénomènes de résonance

Questions de cours (Terminale et PCSI)

On considère un oscillateur unidimensionnel, linéaire, amorti fluide, excité sinusoïdalement, réglé par l'équation différentielle

$$m\,d^2x/dt^2 + f\,dx/dt + k\,x = F_0 \cos \omega t$$

3 a) Mettre cette dernière équation sous forme canonique en introduisant ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur libre non amorti correspondant et Q le facteur de qualité énergétique.

3 b) Qu'appelle-t-on résonance d'amplitude d'élongation ? résonance de phase d'élongation ? d'amplitude de vitesse ? de phase de vitesse ?

3 c) Rappeler sans refaire les calculs correspondants, l'allure des graphes d'amplitude d'élongation et de vitesse, en régime sinusoïdal permanent, en fonction de la pulsation excitatrice ω, dans les deux cas où
$0 < Q < 1/2$ et $Q > 1/2$
(quatre graphes à représenter au total).

On fera figurer sur ces graphes les valeurs limites en ordonnées pour les abscisses $\omega = 0$ et $\omega = +\infty$ ainsi que la position relativement à ω_0 des pulsations de résonance éventuelle.

3 d) Calculer en régime sinusoïdal permanent, la valeur moyenne temporelle $< P >$ sur une période $T = 2\pi/\omega$ de la puissance instantanée de la force excitatrice extérieure $F_0 \cos \omega t$.
Tracer et commenter le graphe de $< P >$ fonction de ω ?

3 e) Existe-t-il un autre nom attribué au coefficient Q ? Lequel ? Justifier la réponse à l'aide d'un exemple.

3 f) Si vous aviez à choisir pédagogiquement entre les résonances, en élongation, en vitesse et en puissance, laquelle des trois présenteriez vous et pourquoi ?

4 Oscillateur non linéaire

Résolution d'un exercice de travail dirigé (Terminale et PCSI)

Tournez la page S.V.P.

On considère un point matériel de masse m mobile sur un axe Ox. Il est soumis à un champ de forces dérivant de l'énergie potentielle $E_p(x) = k\,x^2/2 - k\,x^3/(3L)$ où k et L sont des réels positifs.

4 a) Comment feriez vous reconnaître pédagogiquement, sans calculs superflus, en classe de Terminale, le nombre et la nature (stable ou non) des positions d'équilibre de m dans ce champ de forces ?

4 b) On suppose le terme en x^3 correctif devant celui en x^2.
Démontrer que le mouvement d'ordre 0 au voisinage de x = 0 est celui d'un oscillateur harmonique d'amplitude A. On déterminera la fréquence propre et le centrage $\langle x(t)\rangle_0$.

4 c) Déterminer le mouvement à l'ordre 1.
Pourquoi dit-on dans ces conditions qu'on a affaire à un oscillateur non linéaire ?
Quel est l'harmonique généré par la non linéarité à l'ordre 1 ? Déterminer le nouveau centrage $\langle x(t)\rangle_1$ en fonction de A et L.

4 d) Voyez vous un rapport pédagogique à évoquer devant vos élèves, entre la méthode de résolution des questions 4 a), 4 b) 4 c) et celle du problème classique en PCSI de la déviation vers l'Est ?
Dans quel cadre plus général s'inscrit ce type de démarche ?

4 e) Le résultat évoqué dans la question 4 c) est à la base d'une théorie de la dilatation d'un cristal.
Pouvez-vous préciser quelques éléments du raisonnement physique sous-jacent à cette compréhension ?

5 Oscillateur paramétrique

Résolution d'un exercice de travail dirigé (Terminale et PCSI)

On considère un pendule simple de longueur variable (m, l(t), g) oscillant dans un plan vertical Oxy, dans le champ de pesanteur uniforme $\mathbf{g} = g\,\mathbf{e}_x$.
En fait, la longueur de ce pendule simple peut passer, au cours du mouvement, en un temps négligeable devant tout autre temps caractéristique du dispositif, de la valeur l_0 à la valeur $l_0 - \Delta l$ et inversement avec $\Delta l > 0$ (voir figure 1).

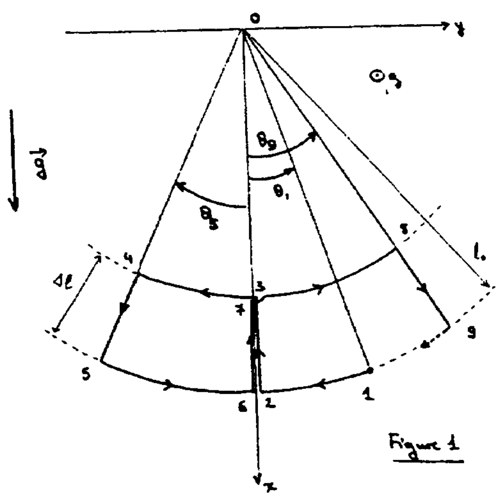

Figure 1

Dans toute cette question on supposera que le pendule reste dans le cadre des petits mouvements (les diverses élongations angulaires rencontrées seront donc considérées comme "petites" devant 1, de sorte qu'à chaque instant, sin θ sera assimilé à θ).

On lance le pendule avec les conditions initiales suivantes :

$l = l_0$, $\theta = \theta_1 > 0$ et $d\theta/dt = 0$ (position 1 sur la figure 1).

Il se déplace de la position 1 à la position 2 verticale avec une longueur l_0 : ensuite en un temps négligeable, sans que θ ait le temps de changer, la longueur l passe brutalement de l_0 à la valeur $l_0 - \Delta l$, de la position 2 à la position 3.
Le pendule se déplace de la position 3 à la position 4 extrêmale gauche avec une longueur $l_0 - \Delta l$, et à nouveau, en un temps négligeable, sans que θ ait le temps de changer, la longueur l passe brutalement de $l_0 - \Delta l$ à l_0, de la position 4 à la position 5 ; le système évolue ainsi de suite, comme indiqué sur la figure 1.

Le pendule passe ainsi dans les positions successives 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...

5 a) On appelle θ_9 la nouvelle élongation extrêmale droite. Calculer le rapport θ_9 / θ_1.

5 b) Quelle est la fréquence d'action de l'excitation par rapport à celle du pendule ?

5 c) Pourquoi qualifie-t-on ce dispositif d'oscillateur en résonance paramétrique ?

5 d) Quelle partie du programme de Terminale trouve une explication partielle dans l'exercice précité ?

5 e) Un élève pose la question : « l'amplitude des oscillations évoluant, l'énergie mécanique augmente. Quelle est l'origine de cette variation ? » Quelle réponse lui donneriez vous ?

6 Oscillateurs couplés

Questions de cours (PC, PC*)

On considère le système de deux oscillateurs couplés représentés sur la figure 2

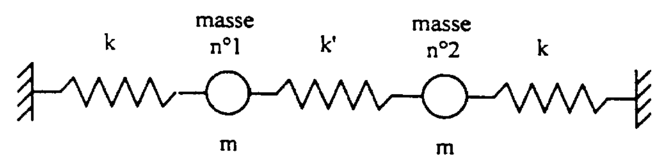

Figure 2

Les solides en translation sont identiques, de masse m, reliés par trois ressorts de masse négligeable, de longueur à vide l_0, de raideurs respectives k, k', k (voir figure 2). Ils se déplacent sur l'axe commun des trois ressorts et ne sont soumis qu'à l'action des ressorts. Les murs droite et gauche sont fixes galiléens.

6 a) Combien y a-t-il de degrés de liberté de vibration ?

6 b) Qu'appelle-t-on modes propres et pulsations propres de vibration ?

6 c) Combien y a-t-il de modes propres et comment les générer en pratique dans le cas ci-dessus ?

6 d) Quelles sont les pulsations propres correspondant au mode propre symétrique et au mode propre antisymétrique ?

Tournez la page S.V.P.

6 e) Notant $u_1(t)$ et $u_2(t)$ les écarts à leurs positions d'équilibre des deux masses m, établir alors les expressions précises de u_1 et u_2 dans le cas d'excitation initiale :

$$u_{10} = a,\ u_{20} = 0,\ (du_1/dt)_0 = (du_2/dt)_0 = 0.$$

6 f) On suppose de plus dans le dernier cas (celui de la question 6 e)) que $k' << k$.
Représenter l'allure dans ces conditions de $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
Comment s'appelle ce phénomène ?

6 g) Examiner la pertinence du cas asymptotique $k'/k = 0$.

6 h) Que dire du cas asymptotique $k'/k \rightarrow +\infty$?

6 h) Dessiner le schéma électrique analogue au schéma mécanique de la figure 2 et calculer les périodes propres de ces circuits électriques couplés.

7 De la physique à la chimie, sans calculs

Résolution d'un exercice de travail dirigé (Terminale, PCSI, PC, PC*)

On considère une molécule de CO et une molécule de CO_2 modélisées comme indiqué sur la figure 3.

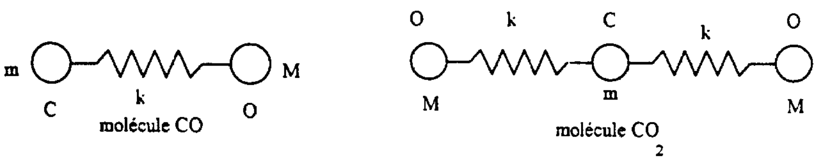

Figure 3

On ne s'intéresse qu'aux mouvements unidimensionnels de vibration longitudinale de ces molécules supposées isolées.

7 a) Justifier par la simple évocation d'un théorème judicieux que la molécule de CO possède un seul degré de liberté unidimensionnel, galiléen et que la molécule de CO_2 en possède deux..

7 b) En déduire, par de judicieuses réductions exemptes de calculs a posteriori, la pulsation propre de vibration longitudinale de la molécule de CO et les deux pulsations propres correspondantes de la molécule de CO_2.

7 c) Quel peut être l'intérêt chimique de tels résultats ?

8 Résonances d'un système d'oscillateurs couplés

Questions de cours (PC, PC*)

On reprend le dispositif de la figure 2, mais on suppose de plus qu'une action extérieure produit sur la masse de gauche n°1 une force supplémentaire longitudinale $F_0 \cos \omega t$.
On s'intéresse au régime sinusoïdal permanent en $u_1(t)$, $u_2(t)$ (définis en 6 e)).

8 a) Tracer les graphes des amplitudes U_{1m} et U_{2m} de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ en fonction de ω.

8 b) Préciser les fréquences de résonance et d'antirésonance.

8 c) Voyez vous des avantages pratiques à l'antirésonance ?

8 d) Comment se modifient les courbes du 8 a) si l'on tient compte de faibles frottements visque linéaires en vitesse.

9 Perturbation d'un oscillateur linéaire, spatial, isotrope pa amortissement fluide

Résolution d'un exercice de travail dirigé (PCSI)

On suppose l'OLSI de la question 2 soumis à une force supplémentaire d'amortissement de type fluide visque en $- m\, v/\tau$. On parle alors d'OLSI amorti fluide (OLSIAF).

9 a) Le mouvement de l'OLSIAF est-il encore plan ? Justifiez votre réponse.

9 b) Précisez les divers types de trajectoires possibles de l'OLSIAF en vous fondant sur les valeu comparées des temps caractéristiques T_0 et τ.

9 c) Développez la pertinence des cas asymptotiques $T_0 >> \tau$ et $T_0 << \tau$.

10 Perturbation d'un oscillateur linéaire, spatial, isotrope par u terme de type Larmor (PCSI, PC, PC*)

Résolution d'un exercice de travail dirigé (PC, PC*)

On suppose l'OLSI de la question 2 soumis à une force supplémentaire corrective, faible, en $\alpha\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_z$ où α e une constante, v la vitesse dr/dt et $\mathbf{e}_z$ le vecteur unitaire de l'axe des z.
On l'appellera OLSI de Larmor ou OLSIL.

10 a) Établir les équations différentielles du mouvement de l'OLSIL projeté sur les trois axes c coordonnées cartésiennes.

10 b) Montrer que le mouvement de l'OLSIL se décompose en un mouvement longitudinal à $\mathbf{e}_z$ et u transversal à $\mathbf{e}_z$.
Montrer que cette décomposition fait intervenir trois fréquences caractéristiques que l'on calculera.

Construction d'un exercice de travail dirigé (PC, PC*)

10 c) On repart sur la base du modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène.
Proposer l'énoncé d'un exercice fondé sur le modèle de Thomson "amélioré", comportant des question pédagogiquement fortes (deux ou trois au maximum), illustrant la notion d'OLSIL et ses prolongemen intéressants à signaler.

11 Oscillateur de Van der Pol (Terminale S puis PCSI)

Question de cours (Terminale, PCSI)

On considère le dispositif ci-dessous (figure 4)

Tournez la page S.V.P.

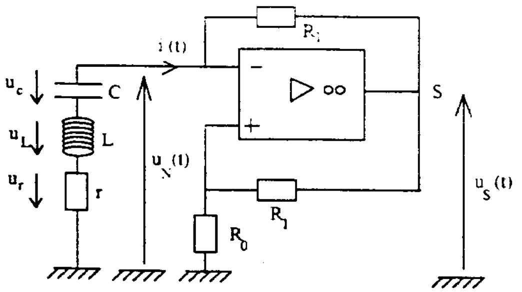

Figure 4

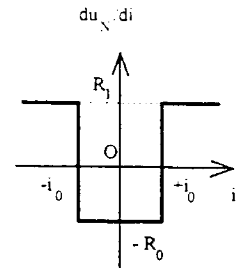

Figure 5

L'amplificateur opérationnel est idéal. Le seul "défaut" éventuel est qu'il sature en tension à $\pm V_{sat}$.

11 a) On suppose que l'amplificateur fonctionne en régime linéaire.
On note u (t) = u_r la tension aux bornes de la résistance r.
Établir l'équation différentielle réglant u(t) dans cette hypothèse de linéarité.
Quel type de solution générale a-t-on selon les valeurs comparées de r et R_0 ? Commentaires ?

11 b) En fait la saturation de tension éventuelle de l'amplificateur opérationnel impose une résistance dynamique du_N /d i fonction de i dont le graphe est représenté sur la figure 5. On parle de puits de résistance dynamique.
On montre et on admettra que le puits symétrique a un fond d'ordonnée $- R_0$, une largeur 2 i_0 avec :

$$i_0 = V_{sat} /(R_0 + R_1).$$

et deux margelles d'ordonnée R_1 .

Pour comprendre simplement l'influence de ce puits sur le montage, on est amené à approximer ce puits de façon parabolique par la courbe :

$$du_N/di = R_0 \,(i^2/i_0^2 - 1).$$

En déduire, dans ce nouveau cadre d'hypothèses que l'équation différentielle qui règle u(t) est maintenant

$$d^2 u/dt^2 - (\omega_0 / Q)\,(1 - u^2 / A^2)\, du/dt + \omega_0^2\, u = 0$$

On donnera la valeur de ω_0 en fonction de L et C, celle de A en fonction de r, i_0, R_0, celle de Q en fonction de L, R_0, r et ω_0.

11 c) Pourquoi qualifie-t-on cet oscillateur, d'oscillateur entretenu ?

11 d) Comment, pédagogiquement, feriez vous comprendre à un élève de Terminale, que cet oscillateur peut s'accrocher à partir d'une situation de repos apparent, qu'il peut s'amplifier et se stabiliser.

11 e) Précisez les cas asymptotiques où Q est très grand devant 1 et où Q est très petit devant 1.
Dans quelles conditions a-t-on un oscillateur quasi-sinusoïdal ? un oscillateur de relaxation ?

11 f) Quelle est l'allure du diagramme de phase du/dt fonction de u ?

11 g) Les figures 6 a, b, c, d présentent diverses simulations (évolution de u(t) et portrait de phase $[du/dt]/(\omega_0)$= f(u) en repère orthonormé) des solutions de l'oscillateur précédent, avec $\omega_0 = 2\pi$, pour deux valeurs de Q , et diverses conditions initiales;
Quels sont les divers commentaires que vous feriez devant une classe, lors de l'exploitation de ces courbes ?
(Le régime stable de la figure 6a est-il sinusoïdal ? En est-il de même pour la figure 6c ? Peut-on calculer l'amplitude maximale de cette oscillation stable ? dépend-elle de Q ? Dans quel sens évolue-t-on dans l'espace des phases ? Quel sont les intérêts du portrait de phase ? A-t-on des informations sur l'énergie ? ...)

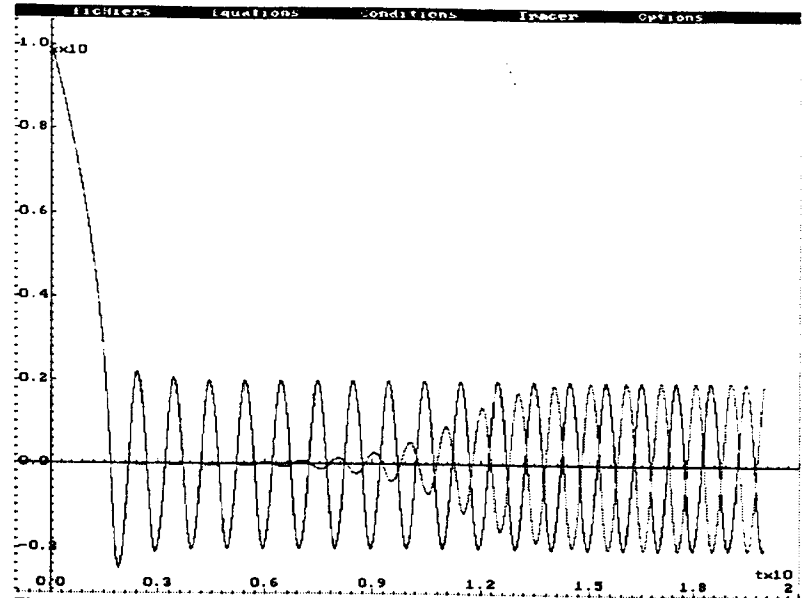

Figure 6a : **courbes u(t)** avec :
$\omega_0 = 2\pi$; Q = 5 ; A = 1, conditions initiales : {$u_0 = 10^{-3}$, $(du/dt)_0 = 0$} et {u_0 = 10, $(du/dt)_0 = 0$}.

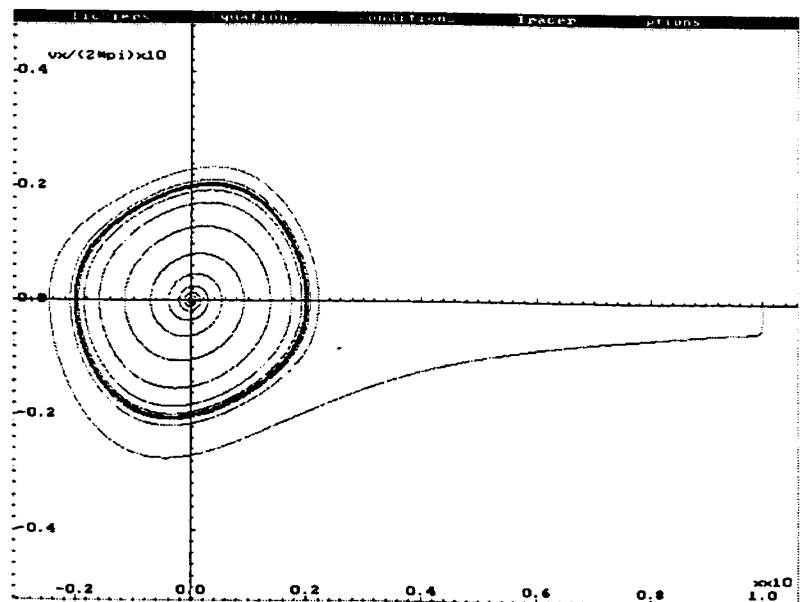

Figure 6b : courbes (1/2π)du/dt = f(u) (repère orthonormé), avec :
$\omega_0 = 2\pi$; Q = 5 ; A = 1, conditions initiales : {$u_0 = 10^{-3}$, $(du/dt)_0 = 0$} et {u_0 = 10, $(du/dt)_0 = 0$}.

Tournez la page S.V.P.

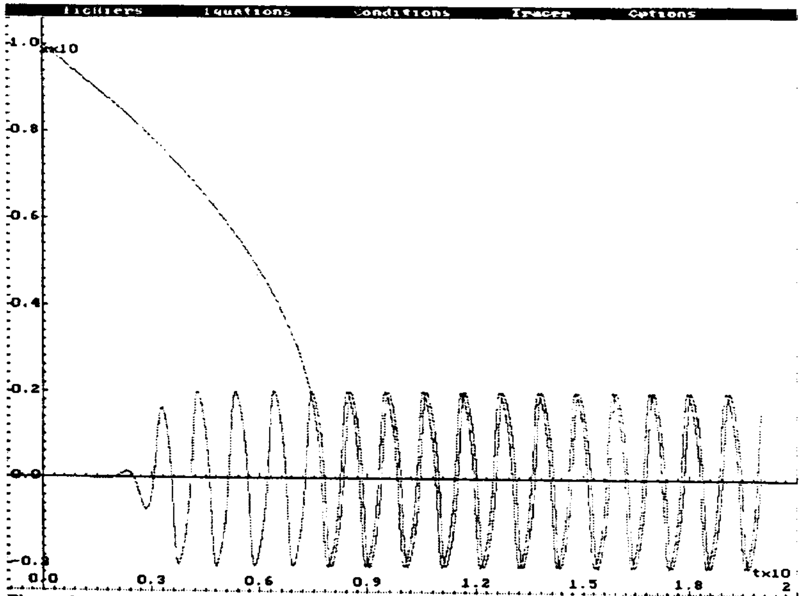

Figure 6c : courbes u(t), avec :
$\omega_0 = 2\pi$; $Q = 1$; $A = 1$. conditions initiales : $\{u_0 = 10^{-4}, (du/dt)_0 = 0\}$ et $\{u_0 = 10, (du/dt)_0 = 0\}$.

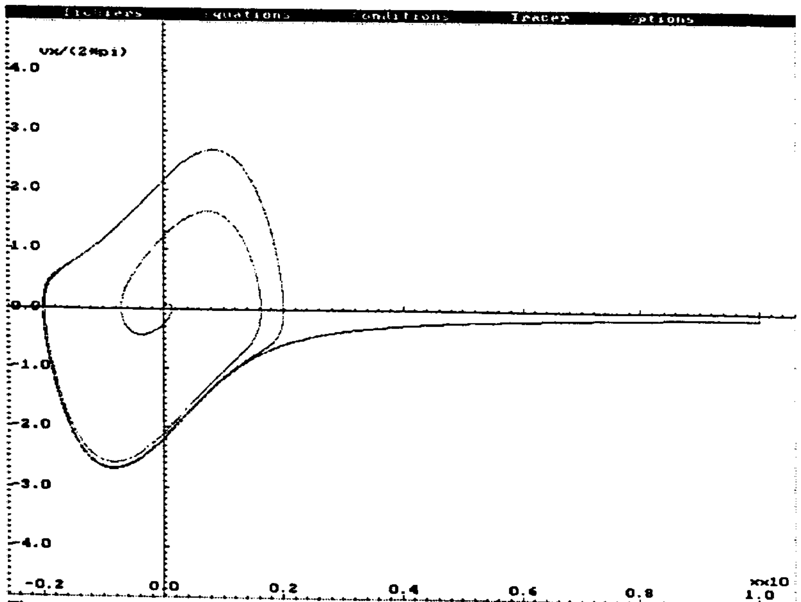

Figure 6d : courbes $(1/(2\pi)du/dt = f(u)$ (repère orthonormé) avec :
$\omega_0 = 2\pi$; $Q = 1$; $A = 1$. conditions initiales : $\{u_0 = 10^{-4}, (du/dt)_0 = 0\}$ et $\{u_0 = 10, (du/dt)_0 = 0\}$.

DEUXIÈME PARTIE

TP-COURS SUR UN OSCILLATEUR DE RELAXATION
(Terminale, Terminale Enseignement de spécialité, PCSI)

12 Étude d'une diode (Terminale, enseignement de spécialité)

12 a) **Décrire** un **montage classique** utilisant composants et appareils usuels dans un lycée qui perm la visualisation de la caractéristique i(u) d'une diode D à jonction, au silicium (figure 7).

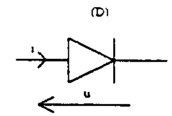

Figure 7

12 b) **Donner l'allure réelle** de la caractéristique statique de cette diode.

12 c) Comment se **manifestent pratiquement**, sur la caractéristique observée à l'oscilloscope ou à table traçante, la résistance en mode bloquant R_b, le courant inverse de saturation I_{sat}, la tension de seuil V_s et résistance directe R_d.

12 d) Par souci de simplicité, on idéalisera pour toute la suite la diode, avec la logique de fonctionnement

$$(i = 0 \text{ ET } u \leq 0) \text{ OU } (u = 0 \text{ ET } i \geq 0).$$

Quelles sont alors les valeurs asymptotiques, idéalisées de R_b, I_{sat}, V_s, R_d ?

13 Caractéristiques de dipôles (Terminale enseignement de spécialité, PCSI)

On considère le montage ci-dessous (fig 8).

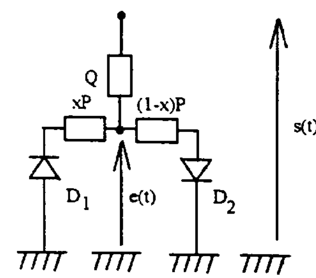

Figure 8

$Q = 1k\Omega$. P potentiomètre $1\ k\Omega$ et x est réglable de 0 à 1.

Tournez la page S.V.P.

(D_1) et (D_2) sont deux diodes à jonction identiques idéalisées comme indiqué plus haut.

13 a) **Déterminer théoriquement** la caractéristique e(s) de ce montage.

13 b) **Décrire le montage pratique** qui permet la visualisation de cette caractéristique.

13 c) Quelles **différences à la visualisation** (s'il y en a !) dans le montage évoqué à la question 13 b) peut-on faire entre une alimentation par signaux sinusoïdaux, triangulaires, en créneaux de même fréquence et de même valeur crête à crête.

Quel signal choisiriez vous pour visualiser la caractéristique attendue ?

14 Un dipôle actif un peu particulier (Terminale)

On considère le schéma de la figure 9

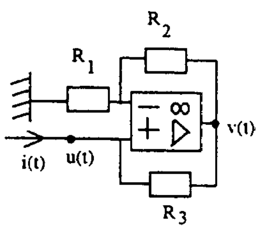

Figure 9

14 a) On suppose l'amplificateur opérationnel idéal et fonctionnant en régime linéaire. **Déterminer** la relation u(i).

14 b) **Donner un nom** naturel, lié à sa fonction, à ce montage.

15 Étude pratique d'un comparateur (PCSI)

On considère le montage de la figure 10 ci-dessous où l'amplificateur opérationnel est toujours supposé idéal avec pour seul "défaut" une saturation possible en tension à $\pm V_{sat}$ selon le signe de $\varepsilon = V_+ - V_-$.
On note v(t) le potentiel V_- de la borne inverseuse et $\beta = R_4/(R_4 + R_5)$

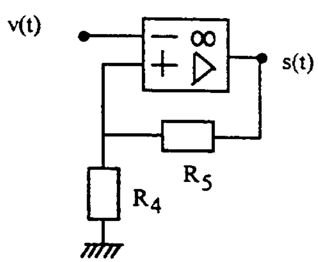

Figure 10

15 a) **Décrire le montage pratique** permettant la visualisation de la caractéristique s(v) du circuit ci-dessus.

15 b) Selon le cas cette caractéristique apparaît à l'oscilloscope sous la forme de la figure 11 a) ou sous celle de la figure 11 b).

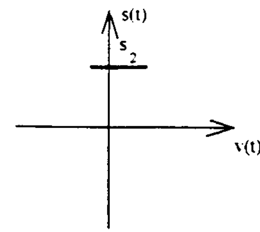

Figure 11 a)

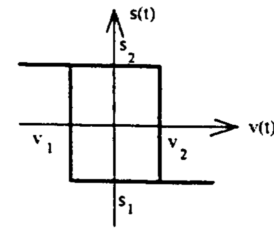

Figure 11 b)

Quelle **erreur pratique** d'alimentation entache le tracé expérimental de la caractéristique sur la figure 11 a) ?

15 c) **Compléter** la caractéristique sur la figure 11 b) en donnant les valeurs de v_1, de v_2, de s_1 et de s_2 en fonction des données, ainsi que le sens de parcours de la caractéristique.

15 d) Comment **en pratique** visualiser le sens de parcours de la caractéristique ?

15 e) **Justifier** alors le nom classique de ce montage.

16 Étude d'un oscillateur de relaxation (Terminale , PCSI)

On effectue le montage de la figure 12 avec $R_1 = R_2 = 100\ k\Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 10\ k\Omega$, $C = 100\ nF$
On choisit $R = R_3\ (R_1/R_2)$ soit ici $10\ k\Omega$.

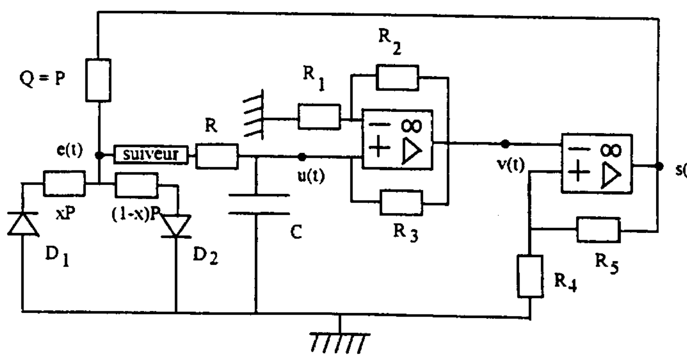

Figure 12

16 a) Quel est l'intérêt **pratique** du suiveur ?

16 b) Déterminer théoriquement la relation u(e) dans le cas où $R = R_3\ (R_1/R_2)$. Quel est finalement le rôle du module de la figure 8 ?
En déduire v(e).

16 c) Après l'analyse par blocs, **interpréter** le fonctionnement global du système et donner **l'allure** des tensions u(t) et s(t) (l'expression analytique de u(t) et s(t) n'est pas demandée).

Tournez la page S.V.P.

16 d) On prélève à l'aide d'un suiveur la tension v(t) et on fait un Lissajous entre cette tension v(t) envoyée en X et une tension sinusoïdale alternative de fréquence f, de valeur crête à crête 2 E_m.
Décrire le type d'oscillogramme obtenu suivant les valeurs comparées de f et de la fréquence de commutation de s(t).

16 e) Comment se modifie l'allure des courbes de Lissajous ci-dessus lorsque x varie de 0 à 1 ?