

ORGANISATION DE L'ÉPREUVE

Le sujet est construit à partir du programme de physique des classes de Terminale scientifique et des classes préparatoires scientifiques (PC). Il porte sur l'étude de l'électromagnétisme. On se propose non pas d'établir mais d'illustrer très progressivement le contenu physique de chacune des équations de Maxwell.

PLAN DE L'ÉPREUVE

- Partie I. – Résumé de cours avec exercices d'application : Bases de l'électromagnétisme.
1. Electrostatique.
  2. Electrocinétique.
  3. Magnétostatique.
  4. Régimes variables.
- Partie II. – Utilisation des équations de Maxwell.
1. Notion de courant de déplacement.
  2. Application des équations de Maxwell à la propagation des ondes électromagnétiques.  
Problème d'application : étude d'un déphaseur optique.
- Partie III. – Étude des matériaux en présence d'un champ électromagnétique : polarisation de la matière.
1. Problème d'application : étude microscopique de la polarisabilité de la matière.
  2. Matériau en régime variable : modèle de l'électron élastiquement lié.
- Partie IV. – Milieux aimantés :
1. Résumé de cours.
  2. Aimantation induite : exercice d'application sur l'ascension d'un liquide paramagnétique.
  3. Travaux pratiques et cours sur le ferromagnétisme.

*On utilisera les données numériques suivantes :*

$$\text{Constante d'Avogadro : } N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

$$\text{Constante de Boltzmann : } k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

$$\text{Masse de l'électron : } m_e = 9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

$$\text{Charge élémentaire : } e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$\text{Accélération de la pesanteur : } g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

*Formulaire de calcul vectoriel :*

$$\oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot d\vec{S}.$$

$$\iiint_{(S)} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{V} \cdot d\tau.$$

$$\Delta V = \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} V).$$

$$\text{div} (\vec{V} \cdot \vec{E}) = \vec{V} \cdot \text{div } \vec{E} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V.$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \cdot \text{div } \vec{A}.$$

## LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

### PARTIE I

#### BASES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

##### I.1. Résultats essentiels d'électrostatique.

Nous considérons dans cette partie des charges électriques au repos immobiles les unes par rapport aux autres, dans un repère qui leur est lié.

##### I.1.1. Loi de Coulomb.

On considère (fig. 1) deux charges  $q_1$  et  $q_2$  en interaction. Ces charges sont situées aux points  $M_1$  et  $M_2$  tels que  $\overline{M_1 M_2} = r_{12} \vec{u}_{12}$ . Exprimer la force  $\vec{F}_{12}$  exercée par  $q_1$  sur  $q_2$ , puis le champ coulombien  $\vec{E}_{12}$  qui en résulte (utiliser le vecteur unitaire  $\vec{u}_{12}$ ).

Décrire les deux méthodes expérimentales qui ont permis à Coulomb d'énoncer la loi qui porte son nom.

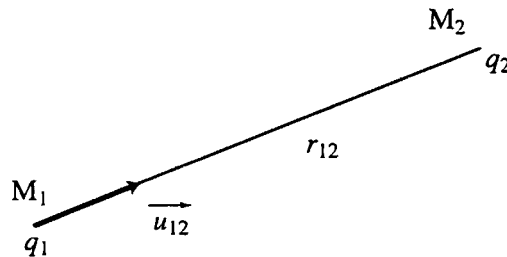


Figure 1: loi de Coulomb

##### I.1.2. Qu'appelle-t-on « superposition linéaire des champs » ?

Que devient l'expression du champ  $\vec{E}(M)$  en un point  $M$ , quand il est créé par une distribution volumique de charge  $\rho(P) d\tau$  étendue à un volume  $\mathcal{V}$  ? L'expression est-elle valable en tout point de l'espace ? ( $\rho(P)$  est la densité volumique de charge,  $d\tau$  est l'élément de volume).

Tournez la page S.V.P.

I.1.3. Expression du potentiel électrostatique.

On considère le champ électrique de vecteurs  $\vec{E}$  créé par une charge ponctuelle. Que signifie l'expression : « le champ dérive d'un potentiel scalaire » ? Que vaut  $\text{rot } \vec{E}$  ?

Utiliser la superposition linéaire des potentiels pour donner l'expression du potentiel  $V(M)$  dans le cas d'une répartition volumique de charges  $\rho(P) d\tau$ .

I.1.4. Exercice : Notion de charge élémentaire ; expérience de Millikan.

Pour déterminer la valeur de la charge élémentaire, il est possible de réaliser l'expérience de Millikan. On disperse un brouillard de fines gouttelettes d'huile (en évitant l'évaporation) dans l'espace séparant les deux plaques horizontales d'un condensateur plan distantes de  $d$ . Les gouttelettes obtenues sont supposées ne pas avoir de vitesse initiale et sont chargées en raison des frottements qu'elles subissent à la sortie du pulvérisateur (fig. 2).

En l'absence de champ électrique  $\vec{E}$ , une gouttelette sphérique de rayon  $R$  est soumise à la pesanteur, à la poussée d'Archimède de la part de l'air ambiant et à une force de frottement visqueux proportionnelle à sa vitesse  $\vec{v}$ , de module  $6\pi\eta Rv$ , où  $\eta$  est le coefficient de viscosité de l'air. Montrer que dans ce cas les gouttelettes atteignent une vitesse limite  $v_0$  que l'on exprimera en fonction du rayon des gouttelettes  $R$ , des masses volumiques de l'huile  $\rho_m$  et de l'air  $\rho'_m$ , de la viscosité  $\eta$  et de la norme de l'accélération de la pesanteur  $g$ . En déduire que la mesure de  $v$  permet de connaître le rayon  $R$  des gouttelettes.

Quand on applique un champ uniforme  $\vec{E}$  exerçant une force ascendante sur les gouttelettes d'huile, que devient l'expression de la vitesse limite  $v'$  ascendante ?

Quelle est l'expression de la charge électrique  $q$  portée par une gouttelette ? Dans quelles conditions une gouttelette est-elle immobile ?

Application numérique :

On donne  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $\rho_m = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;  $\rho'_m = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ S.I.}$  ;  $d = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

En l'absence de champ électrique entre les armatures, on mesure une vitesse limite  $v_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer le rayon  $R$  des particules.

Quand on applique une différence de potentiel  $U = 2400$  volts, une gouttelette en mouvement uniforme réalise une ascension de 10 mm en 14,2 s. En déduire la charge de cette gouttelette. Pour quelle valeur de la différence de potentiel cette gouttelette resterait-elle immobile ?

En comparant les différents résultats expérimentaux on s'aperçoit que, lors de l'application de la différence de potentiel  $U$ , certaines gouttelettes restent immobiles et que d'autres ont des vitesses en progression arithmétique de raison  $\delta v = 50 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Que peut-on en conclure quant aux charges portées par les gouttelettes ?

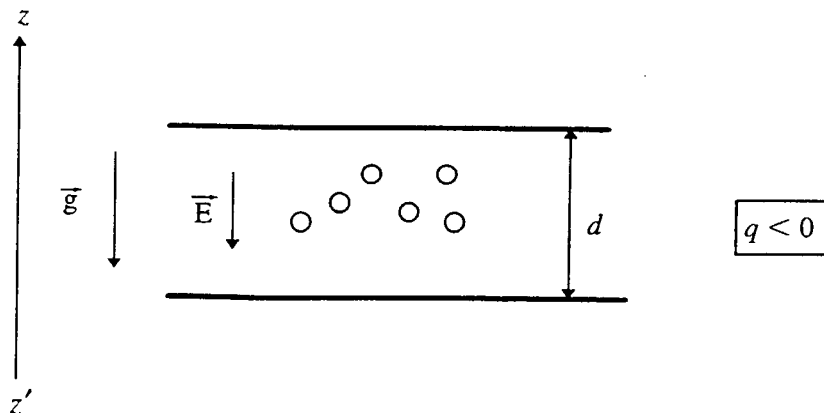


Figure 2 : expérience de Millikan

### I.1.5. Théorème de Gauss.

I.1.5.1. Après avoir rappelé la notion d'angle solide élémentaire  $d\Omega$  sous lequel est vue la surface élémentaire  $dS$  (repérée par le vecteur  $dS \cdot \vec{n}$ ,  $\vec{n}$  étant le vecteur normal à la surface) depuis le point O (fig. 3), exprimer le flux élémentaire  $d\Phi$  du champ électrostatique  $\vec{E}$ , créé par une charge  $q$ , à travers la surface  $dS$ . En déduire le flux du champ  $\vec{E}$ , créé par une charge  $q$ , à travers une surface fermée, puis énoncer le théorème de Gauss.

Qu'appelle-t-on « ligne de champ », « tube de champ » ?

Montrer que, le long d'un tube de champ, la norme du champ électrique décroît dans une région où le tube de champ s'évase.

En admettant l'équation de Maxwell-Gauss locale  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , montrer que l'on peut retrouver le théorème de Gauss.

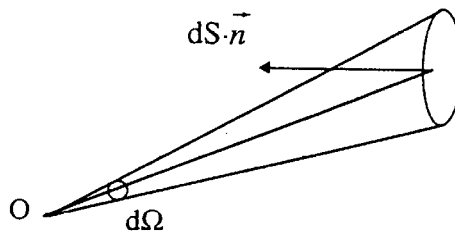


Figure 3 : angle solide

### I.1.5.2. Exercice d'application utilisant le théorème de Gauss.

On considère une sphère de rayon  $R$ , centrée à l'origine  $O$  des axes et portant une répartition volumique de charge uniforme de densité volumique  $\rho$ . Déterminer le champ  $\vec{E}(r)$  et le potentiel  $V(r)$  créés en un point  $M$  quelconque de l'espace repéré par  $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_r$  est un vecteur unitaire. Tracer et commenter leurs graphes en fonction de la norme de  $\vec{r}$ . Comparer leurs expressions à celles des champ et potentiel créés par une répartition surfacique, de densité superficielle  $\sigma$  uniforme, sur une sphère creuse de rayon  $R$ .

### I.1.6. Équations de Poisson et de Laplace.

Écrire les équations de Maxwell en régime permanent (stationnaire) : quelle constatation importante peut-on faire ?

En déduire les propriétés du champ électrique  $\vec{E}$  en régime permanent : quelle relation existe-t-il entre  $\vec{E}$  et  $V$  ?

En utilisant la relation  $\Delta V = \text{div}(\text{grad } V)$ , établir l'équation de Poisson.

A quel cas particulier l'équation de Laplace correspond-elle ?

Ces équations aux dérivées partielles définissent le potentiel  $V$  à une constante près ; quelle convention prend-on généralement ? Est-ce toujours possible ?

### I.1.7. Énergie électrostatique.

On considère une charge ponctuelle  $q_2$  soumise au champ créé par une autre charge  $q_1$  immobile.

I.1.7.1. Exprimer le travail fourni au système pour amener de façon quasi statique cette charge depuis l'infini jusqu'à sa position finale. A partir de ce travail définir l'énergie potentielle de la charge  $q_2$  placée dans le champ créé par  $q_1$  (appelée énergie potentielle d'interaction du système des deux charges).

Préciser la référence de potentiel.

Discuter le signe de cette énergie potentielle en fonction du signe des charges.

I.1.7.2. L'énergie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles  $q_i$  est donnée par l'expression :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(M_i).$$

Justifier cette expression et expliquer physiquement le préfacteur 1/2.

I.1.7.3. A l'aide de  $\text{div}(\mathbf{V} \cdot \vec{\mathbf{E}}) = \mathbf{V} \cdot \text{div} \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \text{grad} V$ , montrer que la densité d'énergie s'écrit :

$$\frac{dE_p}{d\tau} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

I.1.8. *Exercice d'application* : étude du dipôle électrostatique.

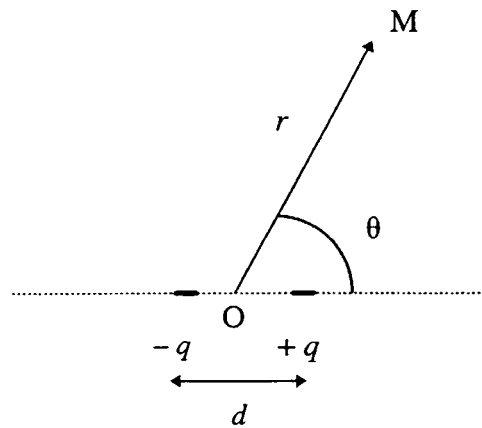


Figure 4 : dipôle électrostatique

I.1.8.1. Un dipôle électrostatique est formé de deux charges opposées  $+q$  et  $-q$  situées à une distance  $d$  très faible devant les distances d'observation  $r = \overline{OM}$  (fig. 4).

Définir le moment dipolaire  $\vec{p}$  et l'approximation dipolaire.

I.1.8.2. Dipôle actif.

Montrer que le potentiel, puis le champ, créés par un dipôle en un point M très éloigné de l'origine du repère où est placé le dipôle, ont pour expressions :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta \cdot \vec{u}_r + p \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta}{r^3}$$

On précisera sur un schéma la signification de chacun des symboles.

Tracer l'allure des lignes de champ et des équipotentielles en les justifiant.

I.1.8.3. Dipôle passif.

Si ce dipôle est placé dans un champ appliqué uniforme  $\vec{\mathbf{E}}_a = E_a \vec{u}_x$ , quelle action subit-il ? Quelle énergie potentielle d'interaction existe-t-il entre le dipôle et le champ appliqué ? En déduire la position d'équilibre stable d'un dipôle dans un champ uniforme. On précisera le sens des lignes du champ  $\vec{\mathbf{E}}_a$  et l'orientation du dipôle.

Montrer que lorsque le champ appliqué  $\vec{\mathbf{E}}_a$  n'est plus uniforme, le dipôle est soumis à une

force  $\vec{\mathbf{F}} = p \frac{dE_a}{dx} \vec{u}_x$  si  $\vec{u}_x$  est le vecteur unitaire selon la ligne de champ passant par le centre

du dipôle et  $p$  la norme du moment dipolaire ; commenter ce résultat.

Décrire une expérience de cours illustrant ce phénomène.

## I.2. Charges en mouvement.

Supposons maintenant que l'équilibre est rompu et que les charges électriques deviennent mobiles. Il apparaît alors des courants électriques.

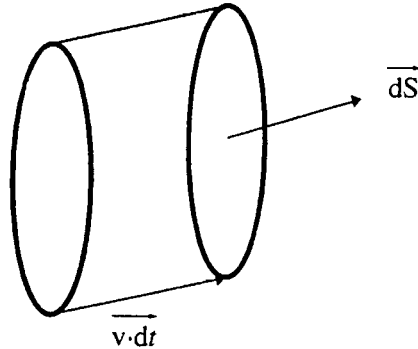


Figure 5 : densité de courant

### I.2.1. Notion de densité de courant.

Soit un flux de particules de charges identiques  $q$  et de même vitesse  $\vec{v}$ . Dans le volume  $d\tau$  on compte  $dN = n d\tau$  charges ; la grandeur physique  $\rho = n q$  représente la densité volumique de charge. On lui associe le champ de vecteurs densité de courant  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ . Quelle est la charge élémentaire  $d^2 Q$  traversant une surface élémentaire  $dS$  pendant le temps  $dt$  (fig. 5) ?

En intégrant sur une surface finie  $S$  orientée, exprimer l'intensité  $I$  du courant en précisant son sens suivant le signe des charges mobiles.

I.2.2. Pour établir l'équation de conservation de la charge électrique reliant  $\vec{j}$  à  $\rho$ , on considère une surface fermée, limitant un volume  $V$  contenant une charge  $Q(t)$  à l'instant  $t$ . En admettant qu'il ne peut y avoir création de charge dans un système isolé, donner l'expression de  $Q(t)$  puis de  $Q(t + dt)$  et en déduire l'équation de conservation des charges appelée également équation de continuité :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Que devient cette relation en régime stationnaire ?

Quelle est la propriété du flux de  $\vec{j}$  ?

I.2.3. Dans un milieu conducteur, le mouvement des charges peut être dû à un gradient de potentiel électrique empêchant l'équilibre du conducteur.

Énoncer la loi d'Ohm locale, considérée comme une loi constitutive, permettant la définition de la conductivité  $\gamma$  du conducteur (on se borne au terme linéaire).

Dans le cas simple d'un conducteur de section  $s$  et de longueur  $L$  en régime stationnaire, écrire la forme intégrale de la loi d'Ohm et retrouver l'expression de sa résistance  $R$ .

I.2.4. Exercice : théorie microscopique de la conductibilité selon Drude.

Soit un conducteur constitué d'un réseau cristallin dans lequel se déplacent des électrons sous l'action d'un champ appliqué  $\vec{E}_a$  uniforme et indépendant du temps. Un élément de volume  $d\tau$  renferme donc une charge mobile négative. On peut interpréter l'influence des défauts du réseau cristallin comme un frottement visqueux freinant le mouvement des charges  $q_e = -e$  avec une force opposée au mouvement  $\vec{f}_v = -\frac{m_e}{t_0} \vec{v}$ , ( $m_e$  représente la masse d'un électron).

I.2.4.1. Établir et résoudre l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse des électrons.

Mettre en évidence le régime transitoire et le régime permanent.

Quel est le rôle de  $t_0$  ?

I.2.4.2. Écrire l'expression de la conductivité  $\gamma$  en fonction de la densité d'électrons  $n_e$ .

Définir la mobilité des électrons  $\mu_e$ .

Application numérique :  $n_e = 8,3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ;  $j = 10 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$ ;  $\gamma = 5,3 \cdot 10^7 \text{ S.I.}$

Calculer le temps  $t_0$  et la vitesse des électrons en régime permanent.

I.2.5. Exercice : un exemple de la limitation de la loi d'Ohm.

On envisage un conducteur métallique assimilable à un gaz d'électrons libres de charge  $q_e$ , de densité  $n_e$  et de mobilité  $\mu_e$ , placés dans un réseau d'ions fixes de densité  $N_0$ . Lorsque la concentration en porteurs de charge  $n$  est pas uniforme, il apparaît un courant de diffusion  $\vec{J}_D$  donné par la loi de Fick :  $\vec{J}_D = -D \text{grad } n_e$ .

Quelle est la condition d'équilibre électrique entre les courants de diffusion et de conduction ? En appliquant une des équations de Maxwell, montrer que l'équation différentielle donnant le

champ  $\vec{E}$  est de la forme  $\Delta \vec{E} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = 0$ , avec  $\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 D}{n_e q_e^2 \mu_e}$  où  $\lambda_D$  représente la longueur de Debye.

Montrer que la diffusion s'oppose à l'accumulation des charges à la surface d'un métal conducteur en résolvant l'équation différentielle. Préciser la répartition du champ électrique et de la densité de charge au voisinage de la surface du métal.

Application numérique :

Sachant que le coefficient de diffusion est  $D = 2\mu_e \epsilon_F / 3$ , où  $\epsilon_F$  représente l'énergie de Fermi, calculer la longueur de Debye quand  $\epsilon_F = 7 \text{ eV}$  et  $n_e = 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

### I.3. Magnétostatique : champ d'induction magnétique créé par un courant stationnaire.

Un courant électrique stationnaire est la cause de la création d'un champ magnétique statique.

I.3.1. Proposer et exposer une expérience susceptible d'illustrer l'existence d'un champ magnétique au voisinage d'un conducteur parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

Rappeler l'énoncé de la loi de Biot et Savart concernant l'expression du champ magnétique élémentaire  $d\vec{B}(M)$  créé par un élément de circuit filiforme en un point d'observation  $M$  (fig. 6).

Plus généralement, on considère un courant stationnaire de densité  $\vec{j}$  dans un volume  $d\tau$  autour d'un point  $P$ . Il crée, en un point  $M$  d'observation, un champ d'induction magnétique élémentaire noté  $d\vec{B}(M)$ . Quelle est l'expression de  $d\vec{B}(M)$  en fonction du vecteur  $\vec{PM}$  et de la densité  $\vec{j}(P)$  ?

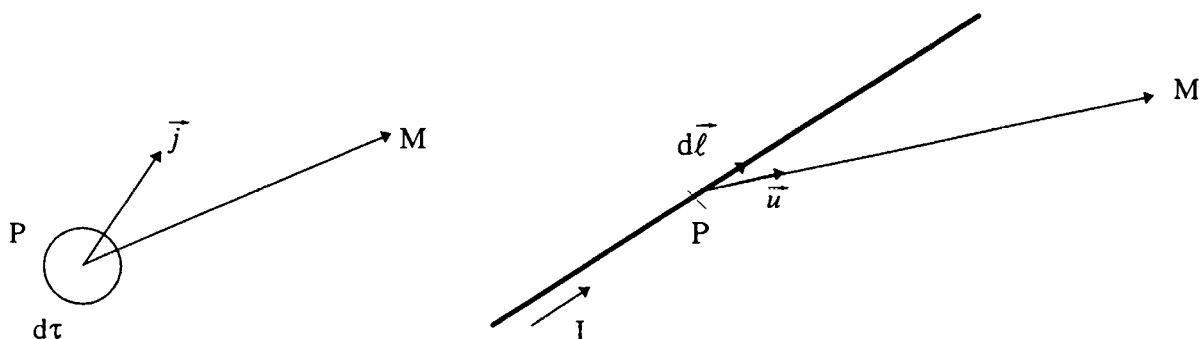


Figure 6 : loi de Biot et Savart

I.3.2. *Exercice d'application directe de la loi de Biot et Savart : étude des bobines de Helmholtz.*

I.3.2.1. Exprimer le champ magnétostatique créé par une spire circulaire parcourue par un courant  $I$ , de rayon  $R$ , en un point  $M$  de son axe  $Ox$  (de vecteur unitaire  $u_x$ ), en utilisant l'angle  $\alpha$  sous lequel la spire est vue depuis le point  $M$ .

Que devient son expression  $\vec{B}_0$  au centre de la spire ?

I.3.2.2. Une bobine circulaire, d'épaisseur négligeable, de centre  $O_1$  et de rayon  $R$ , comporte  $N$  spires parcourues par le courant d'intensité  $I$ . Le champ  $\vec{B}$  en un point  $M$  de l'axe varie avec l'abscisse  $x$  de  $M$  ( $x = \overline{O_1M}$ ). Exprimer le rapport  $\frac{B}{B_0}$  en fonction de la variable  $u = \frac{x}{R}$ .

Tracer la courbe  $B(u)$  en précisant en particulier la position des points d'inflexion.

I.3.2.3. On considère maintenant des bobines de Helmholtz (fig. 7). Pour cela on ajoute une seconde bobine plate identique à la précédente et centrée en  $O_2$  de même axe de symétrie parcourue par la même intensité  $I$  et de même sens. La distance  $O_1O_2$  choisie est égale à  $R$ . Écrire le champ  $\vec{B}$  en  $O$  milieu de  $O_1O_2$ . Faire un graphique donnant l'allure de la variation du champ  $\vec{B}$  entre les bobines. Quelle application pratique utilisant ce dispositif connaissez-vous ?

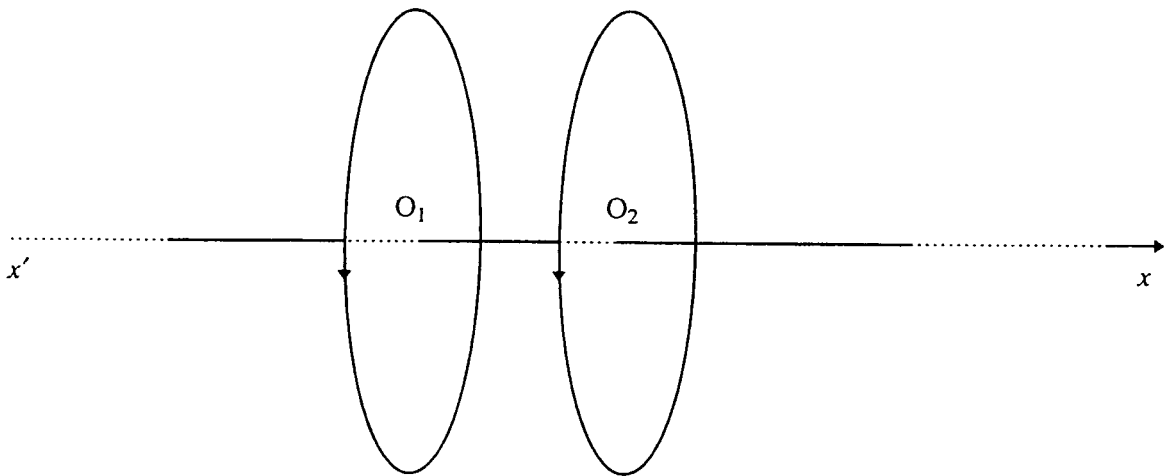


Figure 7 : bobines de Helmholtz

I.3.3. La troisième équation de Maxwell établit que  $\text{div } \vec{B} = 0$ . Quelles en sont les conséquences ?

Que signifie l'expression : le vecteur  $\vec{B}$  est à flux conservatif ?

En reprenant les notations de I.3.1., montrer que le champ  $\vec{B}$  dérive du potentiel vecteur :

$$\vec{A} = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(P) \frac{d\tau}{PM} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

En calculant le rotationnel du champ  $\vec{B}$ , on peut établir la forme locale du théorème d'Ampère :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  à l'aide de l'égalité  $\text{rot} \cdot \text{rot } \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \text{grad} \cdot \text{div } \vec{A}$ .

En exprimant le flux de chacun des membres de l'équation locale à travers une même surface fermée  $S$  s'appuyant sur le contour  $C$ , montrer que cette forme locale est équivalente à la forme intégrale calculée sur le contour fermé  $C$  :  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ .

(C)

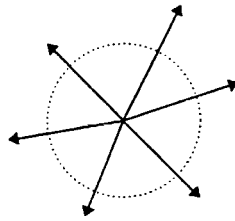
Commenter l'expression : le champ magnétique a les propriétés de symétrie d'un vecteur axial ou



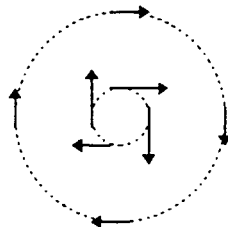
pseudo-vecteur sur l'exemple de la spire circulaire.

I.3.4. Analogie formelle entre électrostatique et magnétostatique.

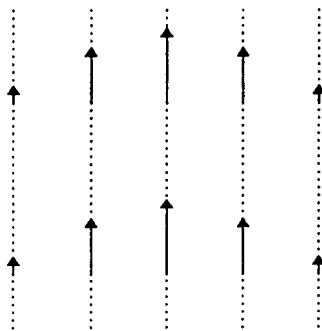
I.3.4.1. Parmi les champs vectoriels proposés (fig. 8a, b, c), citer ceux qui peuvent correspondre à un champ électrique, ou à un champ magnétique.



(a)



(b)



(c)

Figure 8 : lignes de champ

I.3.4.2. Exercice destiné à illustrer cette analogie formelle.

Soit un fil cylindrique indéfini de rayon  $a$ , portant une densité volumique de charge statique  $\rho$ . Déterminer le champ  $\vec{E}(M)$  et le potentiel  $V(M)$  en un point  $M$  extérieur au cylindre, à la distance  $r$  de l'axe du cylindre.

L'analogie formelle des équations  $\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = 0$  en magnétostatique et  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$  en

électrostatique permet de transposer des solutions de l'électrostatique à la magnétostatique.

Un cylindre infini de rayon  $a$  est parcouru par un courant électrique de densité uniforme  $\vec{j}$ , parallèlement à l'axe. Quel est le potentiel vecteur  $\vec{A}$  associé au champ magnétique créé à l'extérieur du cylindre à une distance  $r$  de l'axe ?

#### I.4. Régimes variables : induction électromagnétique.

Le passage aux régimes variables pose la question de la validité des définitions et des propriétés établies en électrostatique et en magnétostatique. Les équations de Maxwell permettent de préciser les modifications indispensables au traitement des régimes non stationnaires.

Les champs magnétostatiques envisagés dans I.3. se manifestent par l'existence de forces exercées sur des particules chargées en mouvement (forces de Lorentz) ou sur une portion de circuit filiforme  $dl$  déformable parcouru par un courant d'intensité  $I$  (force de Laplace).

I.4.1. Décrire en s'aidant d'un schéma une expérience illustrant l'existence de la force de Lorentz, puis une autre illustrant celle de la force de Laplace. On commentera avec beaucoup de soin chacune d'elles, comme devant des étudiants, en montrant l'influence de chaque paramètre.

I.4.2. *Exercice d'application* : effet Hall.

On découpe un ruban parallélépipédique de semi-conducteur (fig. 9). Les seuls porteurs de charges mobiles qu'on considère ici sont des électrons dont la densité est  $\rho_e$ . (la grandeur  $\rho_e = -n_e e$  est la densité de charge en  $C \cdot m^{-3}$ ). La longueur du ruban, placée selon la direction  $x'x$ , est  $L = 20$  mm. La section rectangulaire du ruban est alignée selon chacun des deux autres axes de l'espace : la largeur  $\ell_y = 1$  mm selon l'axe  $y'y$  et l'épaisseur  $d_z = 0,2$  mm selon la direction  $z'z$ .

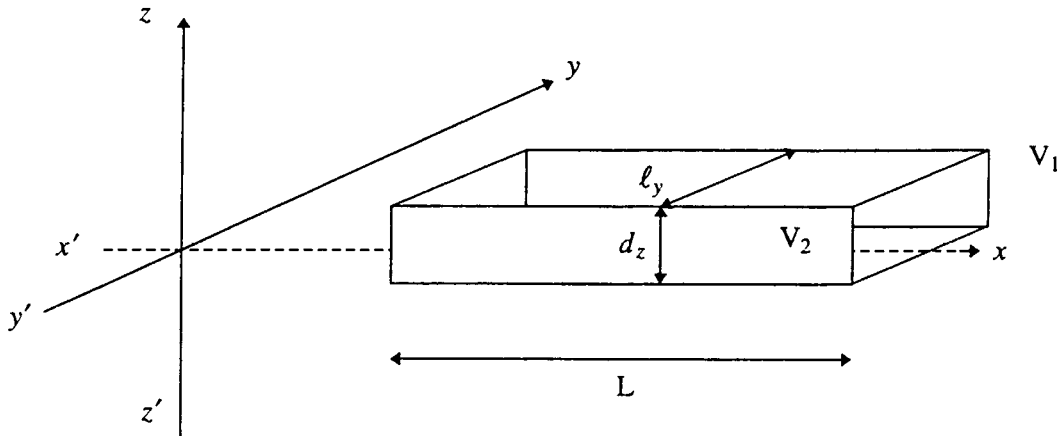


Figure 9 : effet Hall

On dispose un générateur délivrant un courant de valeur  $i_0$  suivant l'axe  $x'x$ . Il crée dans cette direction un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0$  (dans le sens  $x'x$ ). On place le ruban complet dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  uniforme d'axe  $z'z$  (dans le sens  $z'z$ ), colinéaire à l'épaisseur du ruban.

Écrire l'expression de la force magnétique  $\vec{F}_m$  exercée sur les charges mobiles occupant un volume élémentaire  $d\tau$ . Faire un schéma précisant le sens de chaque grandeur vectorielle.

Montrer qualitativement que les électrons ont une vitesse de dérive qui entraîne l'apparition d'une distribution de charges sur les faces  $(x, z)$  du matériau. Cette distribution de charges crée alors un champ électrique  $\vec{E}_1$  que l'on supposera uniforme, colinéaire à  $y'y$  et dont on précisera le sens sur un schéma complet.

En régime permanent, les conditions aux limites du ruban imposent que le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  soit colinéaire à  $x'x$ . Écrire l'équation différentielle du mouvement d'un électron libre et en déduire le champ  $\vec{E}_1$ .

Quelle est l'expression de la différence de potentiel  $V_H = V_1 - V_2$  (voir la fig. 9) mesurable entre les deux bords du ruban de part et d'autre de sa largeur  $\ell_y$  ?

*Application numérique :*

Déterminer  $V_H$  pour une intensité  $i_0 = 10$  mA, dans un champ magnétique  $B_0 = 0,1$  T. Le nombre de charges mobiles par unité de volume est  $n_e = 1,6 \cdot 10^{21} m^{-3}$ .

Le teslamètre, utilisé couramment dans les lycées, permet la mesure des champs  $\vec{B}$  à l'aide de l'effet Hall. Expliquer son fonctionnement.

I.4.3. L'induction électromagnétique.

I.4.3.1. Si on place un circuit électrique ( $\Gamma$ ) filiforme fermé, immobile, dans un champ magnétique variable, l'expérience montre que le circuit ( $\Gamma$ ) est le siège d'un courant induit. On peut le caractériser par une force électromotrice d'induction  $e_m$  égale à la circulation

$$e_m = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}.$$

Énoncer la loi de Faraday et la loi de Lenz.

Décrire rapidement une expérience de cours illustrant ces lois.

I.4.3.2. La deuxième équation de Maxwell  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  est la forme locale de la loi de Faraday.

On est conduit, par l'expérience, à admettre que le flux de  $\vec{B}$  reste encore conservatif en régime variable ; il existe donc un potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ .

Montrer que l'on peut retrouver la loi de Faraday à partir de l'équation de Maxwell précédente.

Comment doit-on alors modifier la relation  $\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$  dans le cas d'un régime variable ?

## PARTIE II

### UTILISATION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

Ces équations régissent le comportement des champs électriques et magnétiques dans les cas les plus généraux.

#### II.1. Introduction du courant de déplacement.

En régime variable, il faut ajouter dans l'expression de  $\text{rot } \vec{B}$  le terme, dit de courant de déplacement,  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  au terme de courant de conduction  $\vec{j}$ ; (attention cette terminologie ne signifie pas un déplacement de charges).

*Exercice d'application.* On considère un milieu matériel soumis maintenant à un champ alternatif sinusoïdal, de pulsation  $\omega$ ,  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ .

En se reportant à la question I.2.4., déterminer les valeurs de la pulsation qui autorisent encore l'écriture de la loi d'Ohm.

On se place dans le domaine de validité de cette loi, ce qui permet d'attribuer une conductivité  $\gamma$  au matériau envisagé. Sous l'action du champ alternatif  $\vec{E}$ , de pulsation  $\omega$ , apparaît dans ce milieu le courant de déplacement  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . On suppose ici que  $\gamma$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  restent indépendants de  $\omega$ . Si la fréquence du champ est 1 MHz, calculer le rapport entre les amplitudes du courant de conduction et du courant de déplacement dans deux cas différents :

- un très bon conducteur :  $\gamma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  ;
- un isolant :  $\gamma = 10^{-6} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

Que peut-on conclure quant à l'importance relative des deux courants dans les deux cas ?

#### II.2. Application à la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

II.2.1. En l'absence de charge et de courant, écrire les équations de Maxwell dans le vide.

II.2.2. En déduire l'équation d'onde (de d'Alembert) à laquelle obéissent le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$ .

Que représente la grandeur  $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  ?

Citer deux exemples de mécanique où l'on rencontre cette forme d'équation, en précisant quelle grandeur physique y obéit.

II.2.3. On se place dans le cas d'un problème unidimensionnel. Montrer que la fonction  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k \cdot x - \omega t)}$  est solution de l'équation de d'Alembert.

Pourquoi parle-t-on alors d'onde plane progressive harmonique ?

Montrer que cette onde est transverse, c'est-à-dire que le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$  sont orthogonaux à la direction de propagation, puis orthogonaux entre eux; les placer par rapport au vecteur unitaire du sens de propagation  $\vec{u}$  sur un schéma.

Commenter chacune des grandeurs physiques intervenant dans l'expression de  $\vec{E}$ .

Classer les différents domaines spectraux, en illustrant par un exemple l'importance des applications des ondes électromagnétiques dans chacun des principaux domaines. On donnera, sous forme d'un tableau, l'ordre de grandeur de la fréquence, de la longueur d'onde dans le vide et de l'énergie élémentaire (exprimée en électronvolt) d'un photon associé au rayonnement électromagnétique de fréquence  $\nu$  dans chaque cas.

II.2.4. Qu'appelle-t-on polarisation des ondes électromagnétiques ?

Quelle est l'expression d'une vibration rectiligne ?

Comment peut-on en réaliser une pratiquement dans le domaine des vibrations visibles ?

Quelle est l'expression d'une vibration elliptique ?

Proposer un montage sur banc d'optique permettant d'en réaliser une.

II.2.5. *Exercice d'application* : Étude d'un élément optique déphaseur.

Une lame biréfringente à faces parallèles, d'épaisseur  $d$ , d'indice ordinaire  $n_x$  et d'indice extraordinaire  $n_y$ , est placée entre un polariseur P et un analyseur A (fig. 10). Dans le plan d'onde, on appelle  $\overline{OX}$  et  $\overline{OY}$  les directions des lignes neutres de cette lame et  $\overline{OP}$  et  $\overline{OA}$  les directions de polarisation que laissent passer le polariseur et l'analyseur. On éclaire ce dispositif par un faisceau parallèle de lumière naturelle, monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  et d'intensité  $I_0$ .

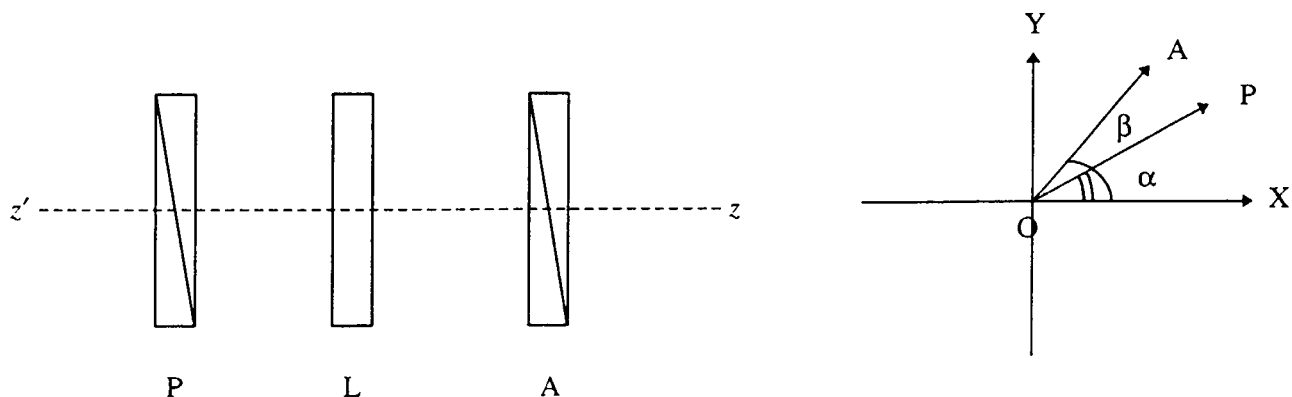


Figure 10 : lame biréfringente

II.2.5.1. On décompose le champ électrique de la vibration issue du polariseur  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$  (exprimée en utilisant la notation réelle) suivant les deux directions  $\overline{OX}$  et  $\overline{OY}$ . La direction de vibration  $\overline{OP}$ , issue du polariseur P, fait un angle  $\alpha$  avec la direction  $\overline{OX}$  et la direction d'analyse  $\overline{OA}$  fait un angle  $\beta$  avec cette même direction  $\overline{OX}$ . Quel est le déphasage  $\phi$  introduit par la lame entre les deux composantes suivant  $\overline{OX}$  et  $\overline{OY}$  ?

Quelle est l'expression des deux composantes de la vibration issue de la lame ? Que devient la vibration à la sortie de l'analyseur ?

En admettant que l'intensité vibratoire  $I$  est donnée par l'expression  $I = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle$ , dans laquelle le signe  $\langle \rangle$  représente la valeur moyenne temporelle, quelle est l'intensité lumineuse  $I$  recueillie après l'analyseur en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\phi$  et l'intensité  $I_0$  incidente sur la lame ? Quelles sont les expressions de l'intensité maximum  $I_{\max}$  et de l'intensité minimum  $I_{\min}$  ? S'agit-il d'interférences ?

La visibilité d'un signal est souvent donnée par le rapport  $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ . Quelles valeurs des angles  $\alpha$  et  $\beta$  permettent d'avoir simultanément la visibilité maximum  $V = 1$  et l'intensité  $I_{\max}$  maximum ?

II.2.5.2. On veut maintenant réaliser une lame biréfringente d'épaisseur variable. On prend pour cela un biprisme d'angle au sommet  $\theta$  (fig. 11). Les deux prismes accolés sont taillés dans le même matériau biréfringent mais leurs directions  $\overline{OX}$  et  $\overline{OY}$  sont respectivement croisées comme le précise la figure. L'angle  $\theta$  est assez faible pour qu'on puisse négliger les réfractions au passage entre les deux prismes et confondre  $\theta$  et  $\tan \theta$ . On peut faire glisser le second prisme par rapport au premier en maintenant leurs deux faces en contact, à l'aide d'une vis micrométrique : dans la région où les deux prismes sont en regard, l'épaisseur traversée par le faisceau est donc ajustable.

On éclaire ce biprisme à l'aide d'une vibration naturelle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , entre polariseur et analyseur croisés. Les directions  $\overline{OP}$  et  $\overline{OA}$  sont à  $45^\circ$  des directions des lignes neutres  $\overline{OX}$  et  $\overline{OY}$ .

Exprimer le déphasage introduit par le biprisme entre les deux vibrations composantes de polarisation  $\overline{OX}$  et  $\overline{OY}$ , en fonction de la biréfringence  $\Delta n = n_x - n_y$ , de la longueur d'onde  $\lambda$ , de l'angle des prismes  $\theta$ , du déplacement relatif des deux prismes  $y_0$  et de la position  $y$  du faisceau par rapport au centre  $O$  de la face d'entrée.

Quelle est la figure d'interférence observée quand les polariseurs sont croisés et éclairés par un faisceau large ?

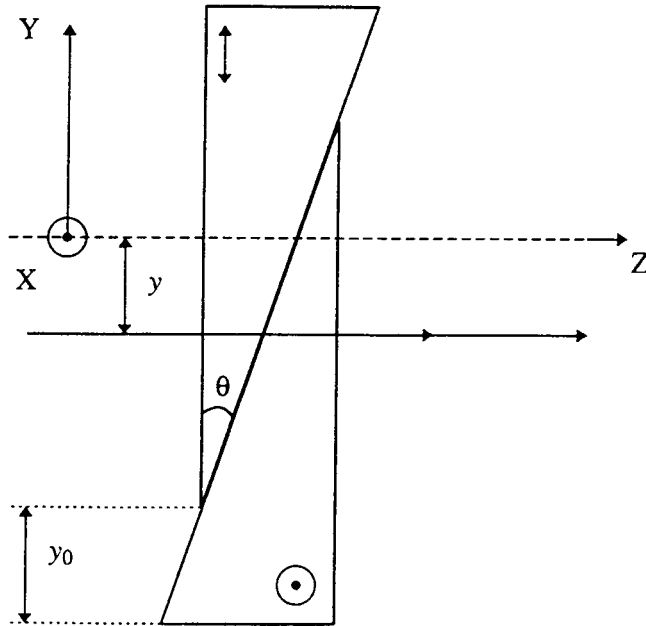


Figure 11 : déphaseur

## PARTIE III

### LES MATÉRIAUX EN PRÉSENCE DE CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

#### III.1. Travaux dirigés : cas des champs électriques permanents.

##### III.1.1. Équation de Maxwell-Gauss en présence de matériaux diélectriques.

Lorsqu'on applique un champ  $\vec{E}_a$  à un diélectrique, les charges liées au milieu se déplacent à l'échelle atomique. Il apparaît des dipôles électriques de moments dipolaires  $\vec{p}$  : c'est le phénomène de polarisation, que l'on caractérise à l'échelle macroscopique par le vecteur polarisation  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$ . On considère les densités volumique et surfacique de charges de polarisation

reliées au vecteur  $\vec{P}$  par les égalités :  $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$  et  $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ ,  $\vec{n}$  étant la normale à la surface orientée de l'intérieur vers l'extérieur du diélectrique.

Si on tient compte à la fois des charges libres  $\rho_\ell$  et des charges liées  $\rho_p$  dans la valeur de  $\rho$ , que devient l'équation  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  ? On appelle  $\vec{D}$  le vecteur excitation électrique (ou induction

électrique ou déplacement électrique) et on écrit l'équation de Maxwell-Gauss sous la forme  $\text{div } \vec{D} = \rho_\ell$ . Quelle est l'expression du vecteur  $\vec{D}$  en fonction de  $\vec{E}$  et de  $\vec{P}$  ?

##### III.1.2. Exercice développant l'étude macroscopique de la polarisation de la matière.

On se limite ici à l'application d'un champ électrique assez faible pour que la polarisation  $\vec{P}$  et le champ local  $\vec{E}_\ell$  soient colinéaires dans le cas des matériaux homogènes et isotropes. On pose alors  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ . La grandeur  $\chi_e$  s'appelle la susceptibilité électrique. On définit la permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$  par la relation  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ . Quelle expression relie la susceptibilité  $\chi_e$  à la permittivité relative  $\epsilon_r$  ?

On considère un condensateur plan dont la distance séparant les armatures est  $d$ . Lorsque ses armatures sont séparées par du vide, le champ électrostatique est  $\vec{E}_a$  ; il suit les équations de Maxwell :  $\text{div } \vec{E}_a = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0}$  et  $\text{rot } \vec{E}_a = 0$ .

On remplit maintenant tout l'espace existant entre ses deux armatures à l'aide d'une lame à faces parallèles diélectrique sans changer les charges libres portées par les armatures. Le diélectrique est donc plongé dans un champ  $\vec{E}_a$  (supposé uniforme), et par suite il apparaît une polarisation  $\vec{P}$  elle aussi supposée uniforme.

Quel champ peut-on associer aux charges de polarisation ? A l'aide d'un schéma, dites pourquoi il est nommé dépolarisant.

Quel est le champ macroscopique intervenant dans la définition de  $\chi_e$  ?

Le diélectrique possède une permittivité relative  $\epsilon_r$ . A l'aide de la nouvelle équation de Maxwell-Gauss, trouver la relation entre les densités surfacique de charge libre  $\sigma_\ell$  et de polarisation  $\sigma_p$ .

Que devient le nouveau champ  $\vec{E}$  entre les armatures ?

Comment sont modifiées la tension et la capacité du condensateur ? Que peut-on en conclure ?

##### III.1.3. Problème abordant l'étude microscopique de la polarisation de la matière.

Lorsqu'on étudie la polarisation, d'un point de vue microscopique, on est amené à considérer l'existence d'un champ local  $\vec{E}_\ell$  différent du champ appliqué  $\vec{E}_a$  responsable de la polarisation. Le champ local tient compte de la superposition du champ appliqué et du champ créé par tous les autres dipôles eux-mêmes en interaction avec le champ appliqué. A la notion de champ local est liée celle de polarisabilité microscopique  $\alpha$ .

III.1.3.1. Cas de la polarisation électronique.

Sous l'action du champ électrique local  $\vec{E}_\ell$  les nuages électroniques de chaque atome ou de chaque molécule, globalement neutres, se déforment. Le barycentre  $O^-$  du nuage électronique se déplace en moyenne à une distance  $d$  du noyau considéré comme le barycentre  $O^+$  des charges positives. Il en résulte une polarisation électronique de chaque atome ou molécule qui devient le siège d'un moment électrique induit  $\vec{p}$ . Quand le champ  $\vec{E}_\ell$  n'est pas trop intense, le moment  $\vec{p}$  lui est proportionnel :  $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_\ell$ , où  $\alpha$  est la polarisabilité.

*Application au calcul de la polarisabilité d'un atome d'hydrogène, dans le cas du modèle très simple de J. J. Thomson.*

On considère l'atome d'hydrogène globalement neutre, représenté simplement par une charge  $+e$  répartie uniformément dans une sphère  $S$  de rayon  $a$  dans laquelle se déplace librement un électron (charge ponctuelle) repéré par sa distance au centre de la sphère  $r$  (le repère est galiléen). On pourra noter  $\vec{O^+O^-} = \vec{r} = r\vec{u}_r$ , si  $\vec{u}_r$  est un vecteur unitaire.

En appliquant le théorème de Gauss, donner l'expression du champ électrique  $\vec{E}_\ell$  auquel est soumis l'électron de la part de la charge positive.

En déduire la force  $\vec{F}$  subie par l'électron et montrer qu'on peut l'assimiler à une force de rappel dont on donnera l'expression de la raideur  $k$ .

On place cet atome dans un champ extérieur. A l'équilibre, l'électron est soumis à la force de rappel et à l'action du champ appliqué  $\vec{E}$ . Quelle est l'expression de la distance  $r$  en fonction de  $k$  et  $\vec{E}$ ? En déduire l'expression du moment dipolaire induit  $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_\ell$  que l'atome a acquis. Quelles sont l'expression et la dimension de la polarisabilité  $\alpha$  en fonction de  $a$ ?

III.1.3.2. Cas de la polarisation dipolaire d'orientation que l'on observe quand les molécules possèdent un moment dipolaire électrique permanent.

Un diélectrique homogène (à l'état gazeux ou liquide) de volume  $\mathcal{V}$  comporte  $N$  molécules dipolaires identiques de moment électrique permanent  $\vec{p}$ . A cause de l'agitation thermique, leurs orientations sont quelconques en l'absence de champ appliqué. La polarisation moyenne macroscopique résultante  $\vec{P}$  est donc nulle.

Quand on applique un champ  $\vec{E}_a$ , les molécules se trouvent plongées dans un champ local  $\vec{E}_\ell$ , que l'on suppose uniforme. Il s'établit alors un équilibre statistique et l'intensité de la polarisation moyenne macroscopique est fonction à la fois du champ local  $\vec{E}_\ell$  et de la température  $T$ .

Suivant la théorie de Langevin, on ne considère que l'interaction entre chaque dipôle  $\vec{p}$  et le champ local  $\vec{E}_\ell$ . De plus on suppose que les molécules suivent une loi statistique de répartition de Boltzmann : la probabilité pour une molécule d'avoir

l'énergie  $W$  est proportionnelle à  $\exp^{-\frac{W}{k_B T}}$ ,  $k_B$  étant la constante de Boltzmann.

Quelle est l'énergie du dipôle  $\vec{p}$  dont le moment fait un angle  $\theta$  avec le champ  $\vec{E}_\ell$ ? Montrer que le nombre  $dN$  de dipôles dont l'énergie est comprise entre  $W(\theta)$  et

$W(\theta + d\theta)$  s'écrit  $dN = KN e^{-u \cos \theta} 2\pi \sin \theta d\theta$  avec  $u \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{E}_\ell}{k_B T}$ .

On rappelle que  $\int_0^\pi e^{-u \cos \theta} 2\pi \sin \theta d\theta = 4\pi \frac{\text{sh } u}{u}$ .

Calculer  $K$ .

Le vecteur polarisation  $\vec{P}$  étant le moment dipolaire résultant par unité de volume,

montrer que son module prend la forme  $P = \frac{N}{\mathcal{V}} \left( \coth u - \frac{1}{u} \right) \cdot p$ .

On appelle fonction de Langevin la quantité  $L(u)$  définie par  $L(u) = \left( \coth u - \frac{1}{u} \right)$ .

Tracer l'allure de la courbe  $L(u)$  en fonction de  $u$  et la commenter succinctement.



Comment l'expression de  $P$  se simplifie-t-elle si  $u \ll 1$ ? Quelle est la signification physique de  $u \ll 1$ ?

Exprimer alors la polarisabilité d'orientation  $\alpha_{or}$  définie par  $\vec{P} = \frac{N}{V} \epsilon_0 \alpha_{or} \vec{E}_l$ . Quelle est l'influence de la température sur la polarisabilité ?

*Application numérique :*

Le moment dipolaire d'une molécule est  $p = 0,6 \cdot 10^{-29} \text{ C}\cdot\text{m}$ . La température est  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  et le champ local vaut  $10^4 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Comparer la valeur de  $u$  à l'unité. Calculer la polarisabilité.

### III.2. Matériaux en régime variable.

#### III.2.1. Modèle de l'électron élastiquement lié.

On fixe un milieu matériel linéaire, homogène et isotrope dans un référentiel galiléen. Une onde électromagnétique plane, de pulsation  $\omega$ , représentée par son champ électrique

$\vec{E}_a = E_{0a} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{u}_z$  se propage dans ce milieu. On considère un atome de ce milieu, possédant un seul électron de masse  $m_e$  et de charge  $-e$  placé à l'origine  $O$  des axes. On suppose que le champ local  $\vec{E}_l$ , vu par l'électron, est colinéaire au champ appliqué et varie avec la même pulsation  $\omega$ ; on le représente donc simplement par  $\vec{E}_l = E_0 e^{-i\omega t} \vec{u}_z$ . On se place dans le cas où la longueur d'onde est grande par rapport aux dimensions atomiques et moléculaires. Outre l'action du champ électrique, l'électron subit une force de liaison au noyau (force de rappel) de la forme

$\vec{f}_r = -k z \vec{u}_z$  ( $k$  est la constante de rappel) et d'une force d'amortissement du mouvement

$\vec{f}_{am} = -\frac{m_e}{t_0} v \vec{u}_z$ , proportionnelle à sa vitesse  $v = \frac{dz}{dt}$ . Cette force d'amortissement reste petite

devant les autres forces appliquées mais ne peut être complètement négligée.

Écrire l'équation du mouvement.

Quelle est la pulsation de résonance  $\omega_0$  ?

Le régime forcé de l'électron correspond à une solution  $z = z_0 e^{-i\omega t}$  où  $z_0$  peut être complexe. Le déplacement  $z$  de l'électron entraîne l'apparition d'un moment dipolaire complexe induit dans chaque atome. Quelle est son expression ?

En adoptant la même définition pour la polarisabilité dynamique qu'en régime statique, quelle est son expression ? Que devient cette expression pour des pulsations éloignées de la résonance quand le terme d'amortissement peut être négligé ?

Représenter les courbes de variation de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $\alpha$  en fonction du rapport  $\omega/\omega_0$ . Préciser les régions de transparence et d'absorption.

## PARTIE IV

### MILIEUX AIMANTÉS

Les courants ne sont pas les seules sources de champ magnétique. Il existe aussi des aimants. L'expérience prouve que le champ créé par les aimants possède toutes les propriétés d'un champ créé par des courants.

#### IV.1. Résumé de cours : définitions.

IV.1.1. Décrire l'expérience de l'aimant brisé et la commenter brièvement.

Dessiner l'allure d'un spectre de limaille de fer d'un aimant droit, puis d'un aimant en U, en donnant l'orientation d'une aiguille aimantée.

IV.1.2. Décrire schématiquement la mise en évidence expérimentale de l'action d'un aimant sur un courant, puis de l'action d'un aimant sur un faisceau électronique.

IV.1.3. Définition du vecteur aimantation, courants équivalents.

Dans un milieu aimanté, chaque petit élément de volume  $d\tau$  portant un moment magnétique  $\vec{dm}$ , on peut définir le vecteur aimantation  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$ . Pour expliquer le comportement de ces matériaux,

on utilise la notion de courants liés, dits d'aimantation, de densité volumique  $\vec{j}_{mv}$  et reliées à l'aimantation  $\vec{M}$  par  $\vec{j}_{mv} = \text{rot } \vec{M}$ .

Dessiner l'allure des courants d'aimantation à l'intérieur du volume d'un barreau uniformément aimanté. Montrer que ces courants sont purement superficiels.

En déduire une analogie en électrocinétique.

IV.1.4. Définition du vecteur champ excitation magnétique  $\vec{H}$ .

En considérant désormais que le champ magnétique  $\vec{B}$  résulte à la fois des courants libres (de conduction) et des courants liés (d'aimantation), exprimer  $\text{rot } \vec{B}$  en régime permanent et montrer qu'on peut définir un champ de vecteur excitation magnétique  $\vec{H}$  relié à  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$ . Que deviennent l'équation de Maxwell-Ampère et le théorème d'Ampère exprimés à l'aide de  $\vec{H}$  ?

#### IV.2. Aimantation induite.

IV.2.1. Dans la plupart des cas les milieux ne sont pas aimantés de façon permanente en l'absence de champ magnétique appliqué.

Par contre, si on applique un champ magnétique, tous les milieux acquièrent une aimantation et on définit la grandeur sans dimension  $\chi_m$  telle que  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ . Montrer qu'il est possible de définir la perméabilité magnétique  $\mu$  d'un matériau reliant  $\vec{B}$  à  $\vec{H}$ . Quelle est la relation entre  $\mu$  et  $\chi_m$  ? Comment classe-t-on les substances diamagnétiques et paramagnétiques ?

IV.2.2. *Exercice d'application* : ascension d'un liquide paramagnétique dans un champ inhomogène et mesure de sa susceptibilité magnétique (fig. 12).

Un liquide paramagnétique remplit un tube en U dont l'une des branches de section  $s$  passe entre les pôles d'un électroaimant. L'autre branche est reliée à un réservoir de surface  $S$  très supérieure à la section  $s$ , hors du champ magnétique. L'établissement du champ magnétique dans l'entrefer provoque une ascension du liquide d'une hauteur  $h$ .

La force exercée sur un échantillon dia- ou paramagnétique placé dans un champ inhomogène peut s'exprimer par  $\vec{f} = \text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{B})$ , formule dans laquelle  $\vec{M}$  doit être considéré comme constant.

Soit un élément de volume  $d\tau$  placé dans un champ hétérogène  $\vec{B}$ . Il possède une aimantation  $\vec{M}$  et est équivalent à un dipôle magnétique  $d\vec{m} = \vec{M} d\tau$ . A quelle force est-il soumis ?

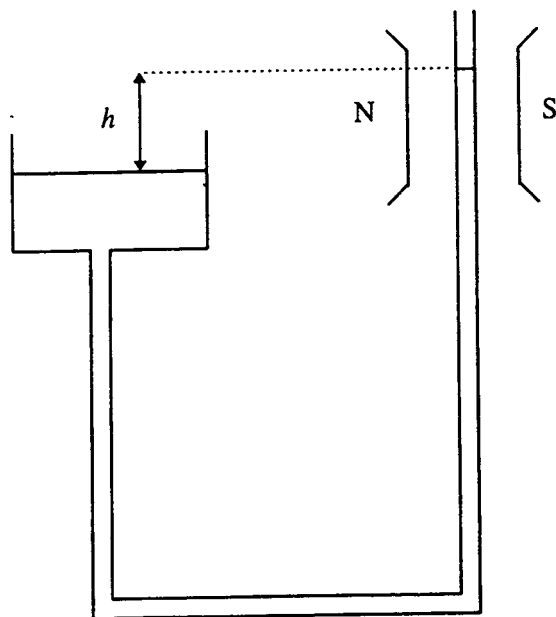


Figure 12 : ascension d'un liquide paramagnétique

Établir la densité volumique de force  $\vec{f}_v = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \text{grad} (B^2)$  à laquelle est soumis le liquide.

On utilisera, après l'avoir justifiée, la relation  $\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  et on rappelle que

$$(\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{B} = \text{grad} \frac{B^2}{2} - \vec{B} \wedge \text{rot} \vec{B}.$$

La masse volumique du liquide est  $\rho_{mv}$  et son champ de pression hydrostatique est  $P$ .

Écrire la relation fondamentale de l'hydrostatique et exprimer  $h$  en fonction de  $\chi_m$ ,  $\rho_{mv}$ ,  $g$ , et  $B_0$  (valeur dans la région centrale de l'entrefer).

Application numérique :

$$\rho_{mv} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; \quad B_0 = 1 \text{ T}; \quad h = 6 \text{ mm}.$$

Calculer la valeur de  $\chi_m$ .

#### IV.3. Partie expérimentale, un T.P. cours : Étude du ferromagnétisme.

Les aimants permanents appartiennent à la famille des corps ferromagnétiques. Ces matériaux, plongés dans un champ magnétique, acquièrent une aimantation beaucoup plus intense que les paramagnétiques et on ne peut plus relier  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$  aussi simplement.

IV.3.1. Citer 5 substances ferromagnétiques. Sous quel état sont-elles le plus souvent ?

Qu'appelle-t-on température de Curie ? Comment peut-on mettre en évidence cette température expérimentalement ?

IV.3.2. On définit toujours la susceptibilité magnétique par  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  et on garde aussi la même définition de la perméabilité magnétique  $\mu$ .

On étudie la courbe de première aimantation. Pour cela on réalise le montage de la figure 13. On utilise une bobine torique contenant un matériau ferromagnétique préalablement désaimanté : pour quelle raison est-ce judicieux de choisir un tore ?

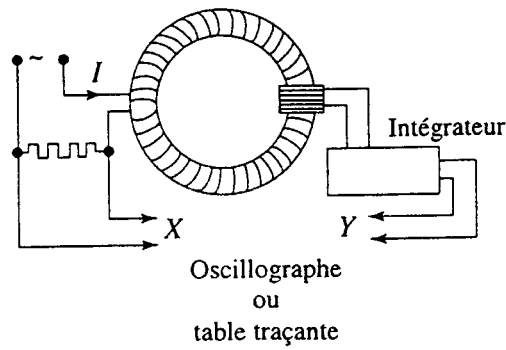


Figure 13

Commenter le schéma du montage et expliquer comment on peut déterminer  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$ .

Quelle est l'allure de la courbe  $M = f(H)$ ? Quelle conséquence peut-on en tirer pour la susceptibilité  $\chi_m$ ? Qu'appelle-t-on aimantation à saturation?

IV.3.3. Qu'appelle-t-on cycle d'hystérésis?

Qu'est-ce que l'aimantation rémanente, le champ coercitif?

Qu'appelle-t-on ferromagnétique doux, dur? Quels matériaux doit-on utiliser pour obtenir des aimants « permanents »?

Quel avantage particulier présentent les ferrites? Citer une de leurs applications.

Qu'appelle-t-on pertes par hystérésis? A quelle caractéristique peut-on les relier?