

L'énoncé de cette épreuve propose de parcourir au travers du thème des ondes quelques domaines de la physique, couverts par les programmes de lycée, classes postbaccalauréats comprises.

Les différentes parties prévoient un accompagnement expérimental, un approfondissement de quelques points des programmes, des exercices propres à vérifier l'acquisition des connaissances.

Fuyantes par nature et difficiles à saisir, peu enclines à se prêter à une étude expérimentale quantitative simple, les ondes posent certaines difficultés d'ordre didactique.

Il est vrai que l'importance des ondes, à la fois sur le plan théorique et dans la pratique, est considérable et que, sous une forme ou sous une autre, elles sont étudiées du collège à l'université.

Le sujet se limite aux ondes électromagnétiques qui sont elles-mêmes très protéiformes puisqu'elles semblent très différentes selon la partie du spectre considéré et selon qu'elles sont libres ou guidées.

Afin de couvrir une partie raisonnable du sujet, deux points différents sont abordés.

Le premier qui concerne l'optique est plus théorique et nous est fourni par l'astrophysique. Il est d'ailleurs tout à fait d'actualité puisqu'il s'agit de la détection des planètes en orbite autour d'étoiles hors du système solaire.

Le second correspond à des préoccupations plus technologiques puisqu'il s'agit du principe des fours à micro-ondes.

Recherche scientifique et cuisine : on ne saurait mieux illustrer la diversité des sciences physiques et de leurs applications.

La première partie et la seconde partie peuvent être traitées indépendamment.

## **PREMIERE PARTIE : PRINCIPE D'UNE METHODE DE RECHERCHE DE PLANETES EXTRA-SOLAIRES**

Les astronomes découvrent depuis plusieurs années, hors du système solaire, des planètes en orbite autour d'étoiles. Dans une des méthodes utilisées, la signature de ces objets est une variation de la vitesse radiale de l'étoile se traduisant par un déplacement de son spectre par effet Doppler.

La partie A étudie l'influence de la planète sur le mouvement de l'étoile dans le cas simple d'orbites circulaires.

La partie B aborde les interférences, la diffraction puis le principe du réseau dans le but d'obtenir le spectre de l'étoile. Les questions A et B sont indépendantes.

La partie C traite de l'effet Doppler puis du principe de la détection de la planète.

### CONSTANTES FONDAMENTALES, VALEURS ET FORMULES UTILES

Constante de la gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Distance moyenne Terre-Soleil	$a_T = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$
Masse de Jupiter	$M_J = 2,0 \times 10^{27} \text{ kg}$
Célérité de la lumière	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Par ailleurs, on rappelle que :  $\cos(a) \times \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

## A. Influence de la présence d'une planète sur le mouvement de l'étoile.

### A.I. Mouvement d'une planète autour d'une étoile.

On considère une étoile de centre E, de rayon R, de masse M dont la répartition est à symétrie sphérique et une planète de centre P assimilée à un point matériel de masse m très petite devant M. Le système étoile-planète est supposé isolé.

Le référentiel ( $R_E$ ), centré en E est considéré comme galiléen dans cette question.

A.I.1.

A.I.1.a.

Déterminer le champ de gravitation  $\vec{g}(r)$  créé par l'étoile en un point situé à une distance  $r > R$ . Justifier qu'il est identique à celui créé par une masse ponctuelle en E.

A.I.1.b.

Exprimer la force exercée par l'étoile sur la planète en fonction du vecteur unitaire  $\vec{e}_r$ , orienté de E vers P.

A.I.1.c.

Justifier soigneusement que le mouvement de P est plan.

A.I.1.d.

On suppose que la planète a un mouvement circulaire de rayon a, de période T et de vitesse  $v_p$ . Exprimer le rayon a puis la vitesse  $v_p$  en fonction de G, T et M.

A.I.2.

On se place dans le cas du système Soleil-Terre ; calculer numériquement la masse du Soleil et la vitesse de la Terre sur son orbite.

### A.II. Référentiel barycentrique.

A.II.1.

Le mouvement du système étoile-planète est décrit par rapport à un référentiel galiléen ( $R_{gal}$ ). Soit I le centre d'inertie du système étoile-planète.

Définir le référentiel barycentrique ( $R^*$ ). Est-il galiléen ?

A.II.2.

A.II.2.a.

Donner la relation entre les vecteurs-vitesse des centres E de l'étoile  $\vec{v}_E^*$  et P de la planète  $\vec{v}_P^*$  dans le référentiel barycentrique.

A.II.2.b.

Dans le cas où le mouvement de P est circulaire dans le référentiel barycentrique, décrire le mouvement de E dans ce référentiel.

A.II.2.c.

Que deviennent ces orbites quand m devient très petit devant M ?

En déduire l'expression approchée de  $\vec{v}_E^*$  au premier ordre en  $\frac{m}{M}$  en fonction de G, T,

M et m.

### A.II.3.

Des mesures donnent pour l'étoile  $\tau$ Bootis de la constellation du Bouvier :

- vitesse  $v_E^* = 470 \text{ m.s}^{-1}$  ;
- période  $T = 3,31$  jours ;
- masse  $M = 2,6 \times 10^{30} \text{ kg}$ .

Calculer la masse de la planète en orbite autour de  $\tau$ Bootis en supposant  $m \ll M$ .  
L'exprimer en prenant pour unité la masse de Jupiter.

## B. Obtention du spectre visible de l'étoile.

### B.I. Interférences lumineuses à deux ondes.

On utilise le modèle scalaire de la lumière. Soient  $s_1(M,t)$  et  $s_2(M,t)$  les amplitudes de deux ondes monochromatiques synchrones reçues en un point M quelconque du champ d'interférences :

$$s_1(M,t) = s_{10} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad s_2(M,t) = s_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Les phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  dépendent de la position du point M.

On admet que l'intensité lumineuse  $I(M)$  mesurée par un détecteur placé en M est proportionnelle à la valeur moyenne temporelle du carré de l'amplitude de l'onde reçue en ce point.

On a donc :

$$I_1(M) = k \langle s_1(M,t)^2 \rangle \quad \text{et} \quad I_2(M) = k \langle s_2(M,t)^2 \rangle$$
$$I(M) = k \langle s(M,t)^2 \rangle \quad \text{avec} \quad s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t).$$

#### B.I.1.

##### B.I.1.a.

Exprimer  $I_1(M)$  en fonction de  $(s_{10})^2$ .

Donner l'expression de  $s(M,t)^2$ , puis celle de  $I$  en fonction de  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$ , intensités de chacune des ondes, et du déphasage  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

##### B.I.1.b.

À quelle condition observe-t-on des interférences lumineuses en M ? On dit alors que les ondes sont cohérentes.

##### B.I.1.c.

Que vaut  $I(M)$  pour des ondes incohérentes ? Commenter.

##### B.I.1.d.

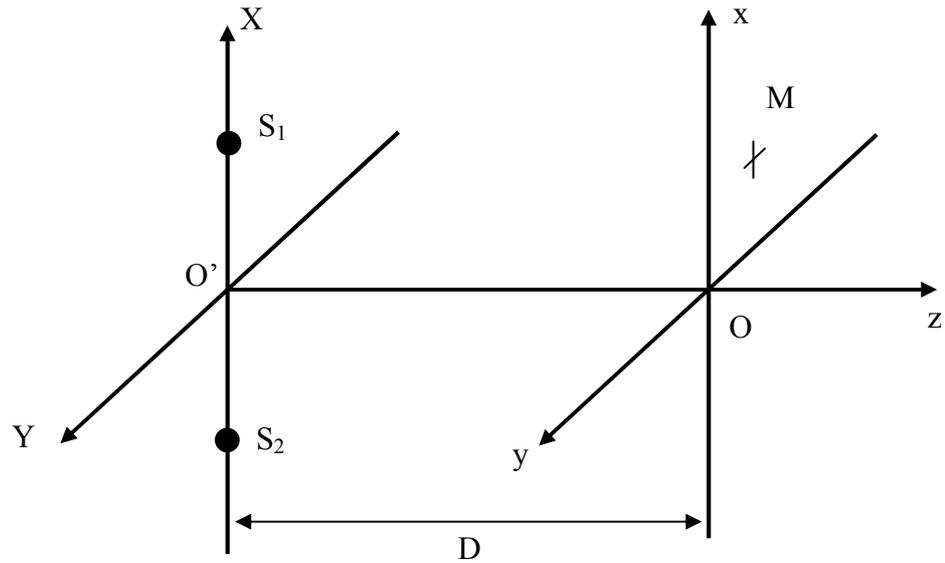
On note  $I_0$  la valeur commune à  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$ .

Que vaut  $I(M)$  pour des ondes cohérentes ?

Tracer  $I(M)$  en fonction du déphasage  $\varphi$  dans le cas où  $I_1(M) = I_2(M)$ . Pour quelles valeurs de  $\varphi$  l'intensité est-elle maximale ?

#### B.I.2.

Soient deux sources lumineuses ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  monochromatiques de longueur d'onde  $\lambda$ , distantes de  $a$  (voir figure 1). On observe des interférences sur un écran placé dans le plan  $(Ox, Oy)$ , situé à une distance  $D$  du milieu  $O'$  du segment  $S_1S_2$ . L'indice du milieu de propagation est pris égal à 1.



$$O'S_1 = O'S_2 = \frac{a}{2} ; O'O = D$$

**Figure 1**

En utilisant les notations de la figure 1, proposer une progression pédagogique détaillée aboutissant à l'expression de l'interfrange. Donner un exemple d'application numérique et la description de deux dispositifs expérimentaux.

## **B.II. Mesure de la distance angulaire entre les deux composantes d'une étoile double.**

### **B.II.1.**

On réalise l'expérience des trous de Young, distants de  $a$ , en lumière monochromatique. On observe les interférences sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente ( $L$ ) de distance focale  $f'$ . La source lumineuse qui éclaire les trous de Young est une étoile  $E_1$  située à l'infini dans la direction de l'axe optique de ( $L$ ), d'intensité lumineuse  $I_0$ . La longueur d'onde de la lumière émise est  $\lambda$ .

Faire un schéma représentant les rayons lumineux qui interfèrent en un point  $M$  d'abscisse  $x$  de l'écran.

### **B.II.2.**

On utilise la lentille dans les conditions de Gauss. Pourquoi ?

### **B.II.3.**

Calculer la différence de marche en  $M$  en fonction de  $a$ ,  $x$  et  $f'$ , puis l'intensité lumineuse  $I_1(x)$  en fonction de  $I_0$ ,  $\lambda$ ,  $a$ ,  $x$  et  $f'$ .

### **B.II.4.**

Une étoile  $E_2$  est à l'infini dans la direction  $\alpha$  par rapport à l'axe optique de ( $L$ ). L'angle  $\alpha$  est très petit.

Faire un schéma en représentant les rayons lumineux qui interfèrent en un point  $M$  d'abscisse  $x$  de l'écran.

Calculer la différence de marche en  $M$  en fonction de  $a$ ,  $x$ ,  $f'$  et  $\alpha$ , puis l'intensité lumineuse  $I_2(x)$  en fonction de  $I_0$ ,  $\lambda$ ,  $a$ ,  $x$ ,  $f'$  et  $\alpha$ . Commenter le résultat.

### **B.II.5.**

On étudie l'étoile double  $\delta$ Orionis dont les deux composantes  $E_1$  et  $E_2$  ont même éclat.  $E_1$  et  $E_2$  éclairent maintenant le dispositif.

On augmente progressivement la distance séparant les trous d'Young. Montrer simplement que l'intensité devient uniforme pour une valeur particulière  $a_1$  de  $a$ .

On prend  $\lambda = 550 \text{ nm}$  et  $a_1 = 28,4 \text{ cm}$  ; calculer  $\alpha$  en radians.

### B.III. Fentes de Young et influence de la diffraction.

#### B.III.1.

On remplace les trous par deux fentes infiniment fines et parallèles à la direction  $O'Y$  (selon la figure 1). Décrire et justifier l'allure de la figure d'interférences obtenue sur l'écran.

#### B.III.2. Diffraction.

##### B.III.2.a.

Étudions la figure de diffraction à l'infini donnée par une seule fente fine rectangulaire, de centre  $S_1$ , de largeur  $b$  selon la direction  $S_1X$  et de longueur  $h$  selon la direction  $S_1Y$ . De plus la largeur  $b$  est très petite devant la longueur  $h$ .

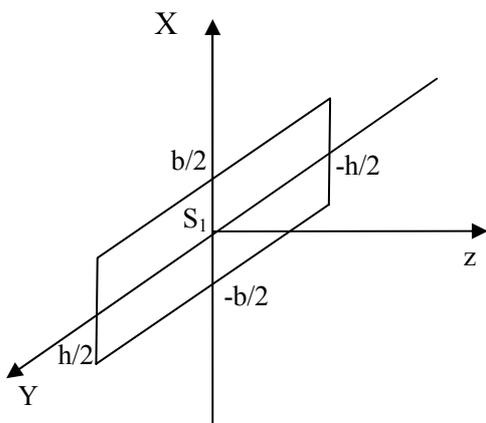


Figure 2 a

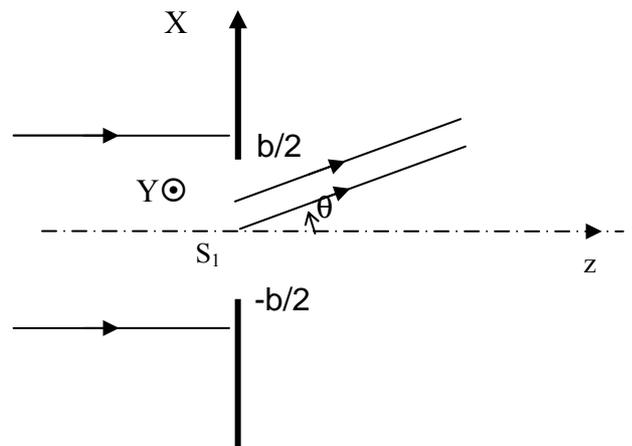


Figure 2 b

La fente est éclairée en incidence normale par un faisceau parallèle d'intensité  $I_0$  (voir figures 2 a et 2 b).

En appliquant le principe d'Huygens-Fresnel, exprimer l'amplitude complexe diffractée à l'infini dans la direction  $\theta$ , l'origine des phases étant celle du rayon qui passe par le centre  $S_1$  de la fente.

##### B.III.2.b.

Donner l'expression de l'intensité diffractée  $I$  en fonction de  $\sin\theta$ .

##### B.III.2.c.

Donner l'allure de  $I$  en fonction de  $\sin\theta$ . Quelle est la valeur de  $\theta$  correspondant au premier minimum ? On l'appelle demi-largeur angulaire de la tache de diffraction.

##### B.III.2.d.

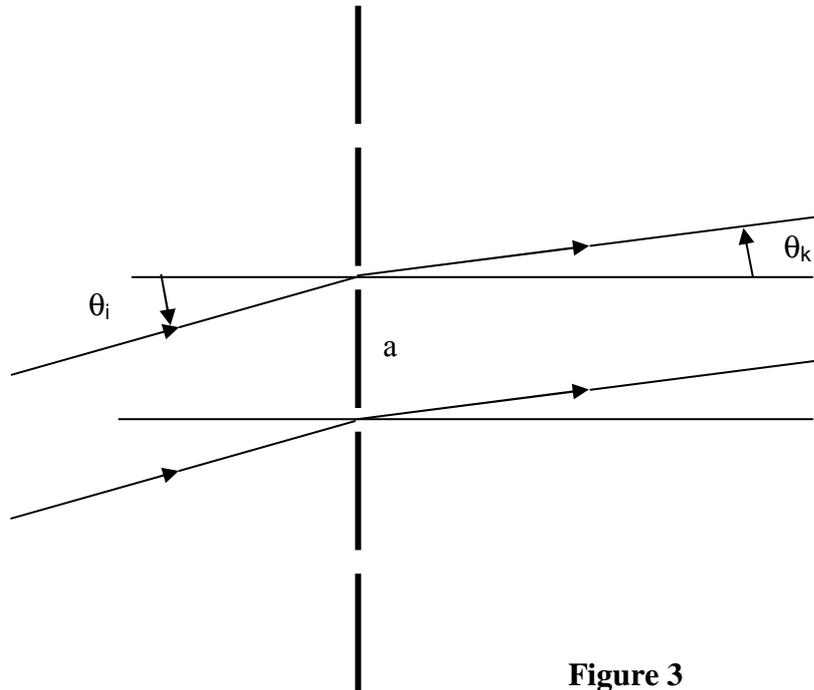
On réalise l'expérience des fentes de Young éclairées par un même faisceau de lumière monochromatique parallèle à l'axe optique. Les deux fentes ont une largeur notée  $b$  et sont distantes de  $a$ . Décrire la figure observée sur l'écran, situé dans le plan focal image de la lentille ( $L$ ), dans le cas où  $a = 3,5 b$ .

### B.IV. Réseau.

#### B.IV.1. Étude d'un réseau plan par transmission.

Soit un réseau plan par transmission de largeur utile  $L$ , possédant  $n = 600$  traits par millimètre. On appelle  $N$  le nombre total de traits et  $a$  la distance entre deux traits consécutifs.

Ce réseau est éclairé par un faisceau parallèle d'incidence  $\theta_i$ , monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  (voir figure 3). Ce faisceau provient d'une fente d'entrée infiniment fine, parallèle aux traits du réseau, située dans le plan focal objet d'une lentille convergente. On appelle  $\theta_k$  l'angle correspondant au maximum d'ordre  $k$ .



**Figure 3**

B.IV.1.a.

Calculer la différence de marche  $\delta$  entre les rayons issus de deux traits consécutifs qui parviennent en un même point de l'écran. En déduire la relation des réseaux pour l'ordre  $k$ .

B.IV.1.b.

Déterminer, en incidence normale, les ordres complètement visibles, pour une lampe à vapeur de sodium dont les longueurs d'onde  $\lambda$  utilisées, exprimées en nanomètres, sont telles que :

$$449,4 \text{ nm} < \lambda < 819,5 \text{ nm}$$

À partir de quel ordre observe-t-on un recouvrement ? Justifier votre réponse.

B.IV.2. Pouvoir de résolution.

Le pouvoir de résolution est défini par la relation :  $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ .

On étudie le cas où  $R$  est limité par la diffraction due à la largeur  $L$  du réseau. On suppose toujours la fente d'entrée infiniment fine.

On admet le critère de séparation de Rayleigh : deux radiations de longueurs d'onde respectives  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$  sont séparées si le maximum de l'une se trouve sur le premier minimum de la figure de diffraction de l'autre.

B.IV.2.a.

En utilisant la formule des réseaux, exprimer la relation entre les éléments différentiels  $d\lambda$  et  $d\theta_k$ .

B.IV.2.b.

Déterminer la largeur du faisceau dans la direction  $\theta_k$  sortant du réseau et calculer la demi-largeur angulaire  $d\theta$  de la tache de diffraction.

B.IV.2.c.

En déduire le pouvoir de résolution  $R$  du réseau.

Dans quelles conditions a-t-on le meilleur pouvoir de résolution ?

B.IV.2.d.

L'intensité lumineuse n'est pas la même dans les différents ordres. Donner une explication en quelques lignes.

Dans quel type de réseau peut-on avoir à la fois un bon pouvoir de résolution et une bonne luminosité ?

## C. Déplacement Doppler des raies émises par l'étoile.

L'effet Doppler est utilisé en astrophysique pour mesurer la vitesse radiale de l'astre observé. La vitesse radiale est la composante de la vitesse parallèle à la ligne de visée qui relie l'astre à l'observateur. Le référentiel est le référentiel héliocentrique considéré dans toute l'étude comme galiléen.

### C.I. Effet Doppler.

La ligne de visée est portée par un axe  $Ox$  (voir figure 4). À l'instant  $t = 0$ , l'étoile est en  $x_E$  et elle a une vitesse radiale  $V_E$  ; l'observateur est en  $O$ , a une vitesse radiale  $V_0$  et l'étoile émet un signal lumineux.

Les vitesses sont constantes et faibles devant  $c$  la célérité de la lumière. On se place donc dans le cas non relativiste.

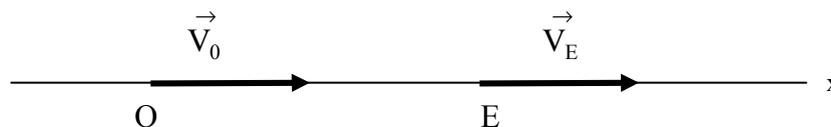


Figure 4

C.I.1.

À l'instant  $t_1$ , l'observateur reçoit le signal. Relier  $t_1$  aux données initiales.

C.I.2.

L'étoile émet à un instant ultérieur  $t$  un deuxième signal. L'étoile est alors en  $x'_E$ . L'observateur reçoit ce deuxième signal à l'instant  $t_2$ . Quelle est la durée de propagation de la lumière pour ce deuxième signal ?

En déduire l'intervalle de temps  $t_2 - t_1$ , entre les deux réceptions de l'observateur, en fonction de  $t$ ,  $V_E$ ,  $V_0$  et  $c$ .

C.I.3.

Le signal lumineux émis par l'étoile est périodique de période  $T$ , donner l'expression de  $T'$ , période du signal reçu par l'observateur, en fonction de  $T$ .

Que devient cette expression pour  $V_E = V_0$  ?

C.I.4.

On pose  $\Delta T = T' - T$ .

Montrer que le développement au premier ordre de  $\frac{\Delta T}{T}$  ne dépend que de la vitesse relative de l'étoile par rapport à l'observateur. À quelle idée fondamentale ce résultat est-il relié ?

### C.I.5.

Le calcul en cinématique relativiste pour l'effet Doppler longitudinal conduit à :

$$T' = \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} T$$

avec  $\beta = \frac{u}{c}$  et  $u = V_E - V_0$ ,  $u$  étant la vitesse relative de l'étoile par rapport à l'observateur, comptée positivement si l'étoile s'éloigne. Effectuer un développement limité au premier ordre en  $\beta$  de  $\frac{\Delta T}{T}$  puis de  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ . Conclure.

### C.I.6.

On observe pour l'amas de galaxies de la constellation de la Vierge un décalage vers le rouge du spectre tel que :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 3,66 \times 10^{-3}$$

Déterminer la valeur numérique de la vitesse radiale de l'amas par rapport à la Terre.

Dans quel sens se fait le mouvement relatif ?

Pourquoi peut-on généraliser ce dernier résultat à toutes les galaxies lointaines ?

## C.II. Découverte d'une planète extra-solaire orbitant autour de $\tau$ Bootis.

### C.II.1.

On suppose dans cette question que la ligne de visée appartient au plan orbital de la planète et de l'étoile.

On revient à la mesure de la vitesse de l'étoile  $\tau$ Bootis (question : A.II.3.).

#### C.II.1.a.

Le spectre de la lumière émise par l'étoile  $\tau$ Bootis est analysé. On constate que le décalage Doppler relatif  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$  de la raie  $H_\alpha$  de la série de Balmer dépend du temps.

Énumérer pour un observateur terrestre les différentes vitesses à considérer pour interpréter ce décalage. Comment peut-on les différencier ?

#### C.II.1.b.

Dans le référentiel barycentrique, défini à la question A.II.1., la trajectoire de l'étoile  $\tau$ Bootis est circulaire, de vitesse  $v_E^* = 470 \text{ m.s}^{-1}$  et de période  $T = 3,31$  jours.

Quelle est l'expression du décalage Doppler relatif  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$  dû à  $v_E^*$  en fonction du temps ?

#### C.II.1.c.

On utilise un spectromètre de pouvoir de résolution  $R$ . Dans la pratique, on peut mesurer le déplacement d'une raie spectrale d'une valeur égale au dixième de celle donnée par le critère de Rayleigh.

En déduire le pouvoir de résolution minimum du spectromètre utilisé pour détecter la planète de  $\tau$ Bootis. Conclusion.

### C.II.2.

Dans le cas général, la ligne de visée fait un angle  $i$  avec la normale au plan orbital de la planète et de l'étoile.

Quelle est, dans ce cas, la relation entre la valeur maximale de la vitesse radiale de l'étoile et  $v_E^*$  ?

Quels renseignements concernant la planète peut-on alors déduire des mesures ?

## SECONDE PARTIE : ONDES GUIDÉES DANS LE DOMAINE CENTIMÉTRIQUE

La production, la propagation et l'utilisation des ondes électromagnétiques dans le domaine des hyperfréquences (fréquences de l'ordre du gigahertz - on rappelle que 1 GHz = 10<sup>9</sup> Hz) sont d'abord étudiées. Une application courante est ensuite envisagée : le principe du four à micro-ondes (figure 5).

### CONSTANTES FONDAMENTALES, VALEURS ET FORMULES UTILES

➤ On rappelle les équations de Maxwell dans le vide :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad ; \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad ; \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

➤ On donne :

- charge élémentaire :  $e = 1,60 \times 10^{-19}$  C ;
- masse de l'électron :  $m = 0,911 \times 10^{-30}$  kg ;
- célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \times 10^8$  m.s<sup>-1</sup> ;
- permittivité du vide  $\epsilon_0$  telle que  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9$  SI ;
- perméabilité du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  SI.

➤ Conventions :

Les vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sont les vecteurs unitaires orientant les axes Ox, Oy et Oz.

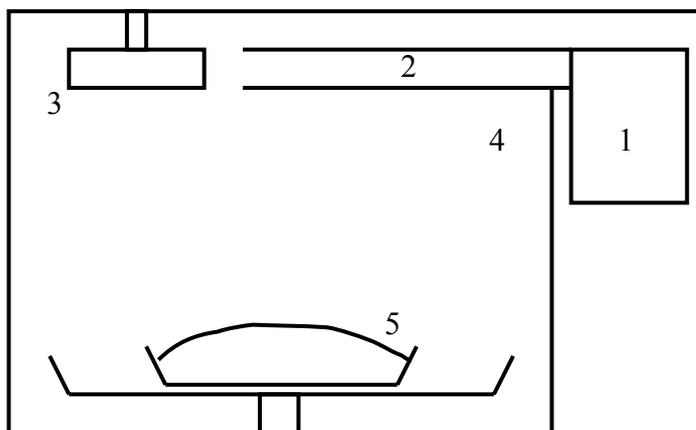
Le vecteur  $\vec{e}$  est un vecteur unitaire quelconque.

Notation complexe d'un vecteur fonction sinusoïdale du temps, de pulsation  $\omega$  :

$$\underline{\vec{E}} = A \exp i(\omega t + \varphi) \vec{e} ,$$

A et  $\varphi$  étant réels (éventuellement fonction des coordonnées x, y et z).

Le vecteur champ en notation réelle vaut :  $\vec{E} = \text{Re} \left( \underline{\vec{E}} \right) = A \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}$



- 1 magnétron
- 2 guide d'ondes
- 3 « brasseur » de modes
- 4 cavité (four)
- 5 aliment (purée)

**Figure 5**

Les parties D, E et F sont indépendantes.

## D. Production des ondes électromagnétiques dans le domaine des hyperfréquences.

Elle peut se faire de différentes façons : l'une d'elles est l'utilisation d'un magnétron.

Ce composant est une lampe constituée d'une enveloppe métallique dans laquelle règne le vide et de deux électrodes (voir figure 6) :

- la cathode C, de centre O, comportant un filament porté à haute température et émetteur d'électrons avec une vitesse  $v_C$  suffisamment faible pour que dans la suite on la suppose nulle et
- l'anode A.

La cathode est au potentiel  $V_C = 0$ , l'anode au potentiel  $V_A$  supposé positif. On pose :

$$U = V_A - V_C > 0$$

On se propose de retrouver quelques ordres de grandeur. Afin de simplifier les calculs, on envisage la disposition à plaques parallèles qui est parfois (mais rarement) utilisée : on suppose que les électrodes, distantes de  $a$ , sont géométriquement identiques (même forme et même surface  $S$ ), qu'elles sont parallèles et face à face.

En outre, on se place en régime permanent : on note  $I$ , constante positive, l'intensité du courant qui traverse le circuit.

Dans ces conditions, on suppose que :

- les grandeurs utiles dans l'espace entre les électrodes sont fonctions de la seule variable  $x$  ;
- les vecteurs caractérisant le mouvement des charges sont colinéaires à l'axe des  $x$ .

L'action du poids des électrons est supposée négligeable devant l'action des autres forces.

Les questions D.I. et D.II. sont indépendantes.

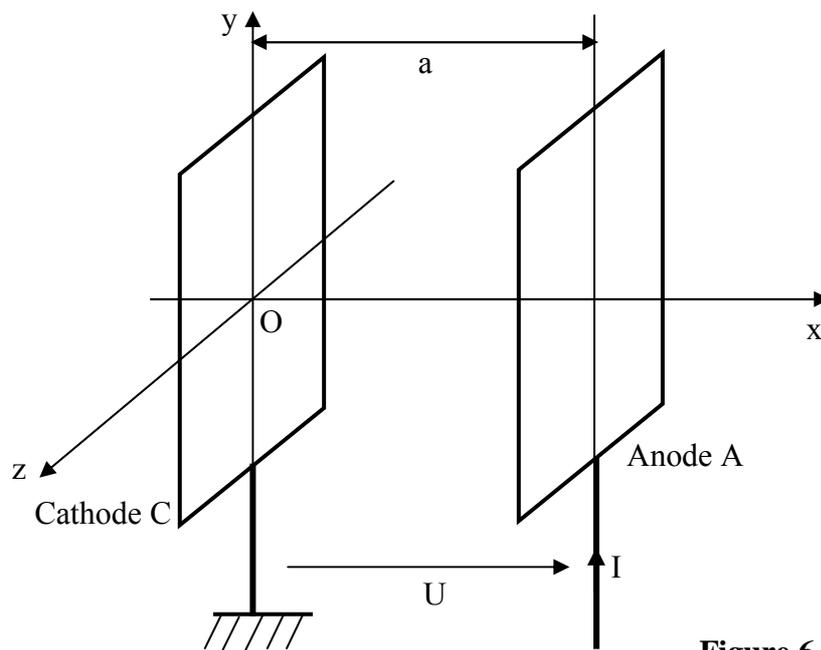


Figure 6

### D.I.

Si la tension  $U$  n'est pas trop élevée, il existe entre les électrodes une charge d'espace de densité  $\rho(x)$ , négative, mesurée en  $C.m^{-3}$ .

Soient  $\vec{v}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$  et  $V$ , la vitesse d'un électron, le vecteur densité de courant, le champ électrique et le potentiel (mesuré par rapport à la cathode) en un point M d'abscisse  $x$ . On a donc  $V(a) = U$ .

On pose :  $\vec{v} = v \vec{e}_x$ ,  $\vec{j} = j \vec{e}_x$  et  $\vec{E} = E \vec{e}_x$ .

D.I.1.

Faire un schéma dans lequel on placera les électrodes, l'axe des abscisses Ox et les vecteurs  $\vec{v}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  en un point quelconque M entre les électrodes.

Exprimer  $\vec{j}$  en fonction de  $\vec{v}$ .

Écrire l'équation de Poisson reliant le potentiel V à la densité de charge  $\rho$ .

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à un électron entre C et M.

Exprimer  $\vec{j}$  en fonction de I.

D.I.2.

Établir une équation différentielle du 2<sup>ème</sup> ordre vérifiée par V(x).

Il est possible de résoudre cette équation sans hypothèses supplémentaires. On se contente ici de chercher une solution de la forme  $V(x) = Kx^p$ , K et p étant des constantes.

Déterminer K et p.

D.I.3.

En déduire la caractéristique I(U) du composant.

Application numérique : U = 1 kV, S = 0,5 cm<sup>2</sup> et a = 4 mm. Calculer I.

D.I.4.

On pose  $v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ , vitesse des électrons à leur arrivée sur l'anode.

Connaissant la valeur de p, déterminée en D.I.2., montrer que  $v = v_A \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ .

Effectuer l'intégration correspondante et calculer le temps de transit T des électrons de la cathode vers l'anode. Que pensez-vous du résultat, connaissant les caractéristiques du magnétron ?

D.I.5.

Ainsi polarisé et utilisé, quel rôle joue le magnétron ?

## D.II.

Lorsque la tension devient plus importante, le modèle n'est plus valable : on admet que la charge d'espace disparaît, que l'intensité du courant est indépendante de la tension et que le champ  $\vec{E}$  entre A et C est uniforme (situation du condensateur plan).

On exerce le champ  $\vec{B}$  uniforme parallèle à Oz et de même sens  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  (B > 0).

D.II.1.

Faire un schéma indiquant l'allure de la trajectoire d'un électron éventuellement capté par l'anode.

D.II.2.

Montrer que, B étant fixé, il existe une tension  $U_C$  en dessous de laquelle aucun électron n'atteint l'anode.

Définir ce que l'on appelle la parabole de coupure  $U_C(B)$ .

Calculer B pour  $U_C = 3$  kV et a = 4 mm. Le résultat est-il compatible avec le fait que les magnétrons soient munis d'aimants ?

### D.II.3.

On choisit les valeurs de  $U$  et de  $B$  au voisinage de la parabole de coupure. On modifie la direction des vitesses électroniques grâce à une onde électromagnétique de faible amplitude et de pulsation  $\omega$ .

Les dimensions des électrodes étant grandes par rapport à la distance  $a$  les séparant, les courants sont importants et peuvent être ainsi commandés par un signal de faible puissance.

Que peut-il se passer, dans certaines conditions, si le gain de l'amplificateur ainsi constitué dépasse un certain seuil ? Cet effet est-il dangereux ou utile dans le problème qui nous occupe ?

## E. Guide d'onde rectangulaire et cavité.

### E.I.

On étudie la transmission d'une onde électromagnétique de fréquence  $f = 2,45$  GHz par un guide d'onde rectangulaire jusque dans une cavité parallélépipédique.

La longueur d'onde correspondante dans le vide est notée  $\lambda_0$ .

Le guide considéré est un tube creux de section rectangulaire (dimensions intérieures selon  $Ox$  et  $Oy$  :  $a$  et  $b$ ) dont les parois sont en métal supposé non magnétique et parfaitement conducteur (voir figure 7).

La propagation est envisagée à l'intérieur du guide et selon  $Oz$  dans le sens des  $z$  positifs.

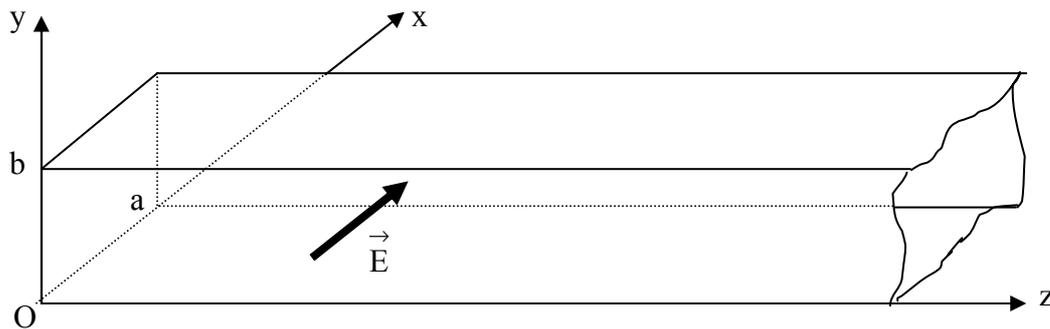


Figure 7

#### E.I.1.

Dans la pratique, un guide de bonne qualité est en aluminium et l'intérieur est recouvert d'une pellicule d'or. Pourquoi ?

#### E.I.2.

Justifier brièvement qu'une onde plane ne peut pas se propager dans le guide.

#### E.I.3. Champ électrique

On souhaite guider une onde monochromatique sinusoïdale de pulsation  $\omega$  dont le champ électrique reste parallèle à  $Ox$ .

On suppose que le champ électrique, en notation complexe, est tel que

$$\vec{E} = E(x, y) \exp i(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

avec  $k$ , nombre réel positif, différent de  $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

E.I.3.a.

En utilisant les lois générales de l'électromagnétisme, montrer que le champ électrique  $E(x,y)$  ne dépend pas de  $x$ .

On le notera  $E(y)$ . Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait  $E(y)$ .

On suppose la quantité  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$  positive, ce qui entraîne l'existence d'une pulsation de coupure  $\omega_c$ . Quelle la forme des solutions  $E(y)$  ?

E.I.3.b.

D'une façon générale, quelles sont les propriétés du champ électrique à l'interface vide – conducteur ?

Que vaut  $\vec{E}$  pour  $y = 0$  et  $y = b$  ? En déduire qu'il existe des modes de propagation repérés par l'entier  $n$  positif.

**Dans toute la suite, on se place dans le cas où  $n = 1$  (mode fondamental).**

Donner l'expression en notation réelle du champ électrique  $\vec{E}$  en fonction de  $E_0$ , valeur maximale du champ.

Trouver la relation de dispersion  $\omega(k)$ .

E.I.3.c.

Que va-t-on trouver sur les parois  $x = 0$  et  $x = a$  ?

E.I.4. Champ magnétique : on suppose qu'il n'existe pas de champ statique.

E.I.4.a.

Utiliser une des équations de Maxwell pour établir l'expression des composantes, en notation réelle, du vecteur-champ  $\vec{B}$  en fonction de  $E_0$ .

E.I.4.b.

Quelles sont les propriétés du champ magnétique à la surface d'un conducteur parfait ?

Que valent les coordonnées  $B_y$  et  $B_z$  en  $y = 0$  et  $y = b$  ?

E.I.5.

La propagation du mode fondamental (défini aux paragraphes E.I.3.a et E.I.3.b.) n'est possible que si la pulsation est supérieure à la pulsation de coupure  $\omega_c$ , donc si la fréquence  $f$  est supérieure à une fréquence de coupure  $f_c$ .

Que vaut numériquement  $b$  pour  $f_c = 1,225$  GHz ?

E.I.6. Transmission de l'énergie.

E.I.6.a.

Donner l'expression en notation réelle du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$ . Calculer ses coordonnées.

E.I.6.b.

Quelles sont les coordonnées de  $\langle \vec{\Pi} \rangle$ , valeur moyenne dans le temps de  $\vec{\Pi}$  ? Que peut-on en conclure sur la propagation de l'énergie ?

E.I.6.c.

Quelle est la puissance moyenne  $P_m = \langle P_{el} \rangle$  transmise à travers une section droite du guide d'onde ? La puissance du four étant de 600 W et étant supposée répartie sur le seul mode fondamental, déterminer  $E_0$ , intensité du champ électrique de l'onde transmise par le guide. On prendra  $a = 4$  cm.

## E.II. Cavité.

L'onde électromagnétique parvient dans le four proprement dit, cavité parallélépipédique de dimensions (A, B et C) constituée de 6 parois métalliques rectangulaires supposées parfaitement conductrices. On définit un trièdre direct Oxyz à partir d'un coin et des arêtes du four (voir figure 8).

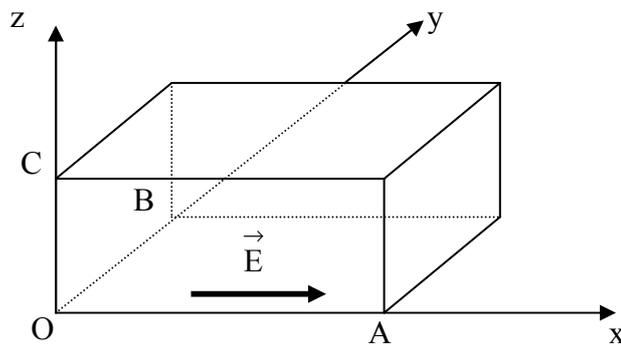


Figure 8

On suppose le champ électrique parallèle à l'axe Ox. Il oscille à la pulsation  $\omega$  et on le note  $\vec{E}_x(x, y, z, t) = E(x, y, z) \exp(i\omega t) \vec{e}_x$ .

E.II.1.

Pour la même raison qu'au E.I.3.a,  $\vec{E}_x$  est indépendant de x. On cherche donc

$$E(x, y, z) = f(y) \times g(z).$$

Montrer que les lois de l'électromagnétisme entraînent que  $\frac{f''(y)}{f(y)}$  et  $\frac{g''(z)}{g(z)}$  sont des constantes,  $f''$  et  $g''$  étant les dérivées secondes des fonctions f et g.

E.II.2.

Que vaut  $f(y)$  pour  $y = 0$  et  $y = B$  ? Que vaut  $g(z)$  pour  $z = 0$  et  $z = C$  ?

En déduire que f et g sont des fonctions trigonométriques sinusoïdales et qu'il existe une double infinité de solutions (modes), chaque mode étant caractérisé par deux nombres entiers  $\ell$  et m.

E.II.3.

Pourquoi, entre le guide et la cavité, le constructeur place-t-il « un brasseur de modes », sorte de ventilateur à pales métalliques qui distribue l'énergie électromagnétique sur les différents modes (voir figure 5) ?

## F. « Modélisation d'une substance à réchauffer ».

La fréquence choisie vaut  $f = 2,45$  GHz.

On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- les effets éventuels du champ magnétique sont négligés : on ne s'intéresse donc qu'au seul champ électrique ;
- la propagation est également négligée : on suppose que le vecteur champ électrique est le même en tout point à un instant donné.

### F.I.

On considère un élément de substance parcouru par un courant de vecteur densité de courant  $\vec{j}$  dans lequel le champ électrique vaut  $\vec{E}(t)$ .

Justifier que la densité volumique de puissance (en  $\text{W.m}^{-3}$ ) cédée par le champ électromagnétique à la matière vaut  $\frac{dP_{el}}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ .

### F.II.

On admet que, dans un corps quelconque, supposé non magnétique, le vecteur  $\vec{j}$  est la somme de deux termes :

- Le courant de charges libres vérifiant la loi d'Ohm  $\vec{j}_L = \sigma \vec{E}$ ,  $\sigma$  étant la conductivité de la substance.
- Le courant de polarisation  $\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ ,  $\vec{P}$  étant le vecteur polarisation.

Dans un milieu linéaire,  $\vec{P}$  est supposé proportionnel à  $\vec{E}$  et on note :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \quad \text{avec } \epsilon_r > 1.$$

On suppose le champ électrique sinusoïdal de la forme  $\vec{E} = E_0 \cos \omega t \vec{e}$ .

Montrer que dans ces conditions seul l'effet Joule est responsable de la dissipation de la puissance moyenne.

### F.III.

Dans le domaine des fréquences de l'ordre du gigahertz, la conductivité est très faible. L'effet Joule qui ne peut pas rendre compte des phénomènes observés, est négligé. On doit tenir compte de l'absorption en supposant que la polarisation est déphasée par rapport au champ électrique.

#### F.III.1.

On utilise la représentation complexe. On suppose  $\vec{E} = E_0 \exp(i\omega t) \vec{e}$  avec ( $E_0$  réel).

On introduit une partie imaginaire à la permittivité :  $\underline{\epsilon}_r = \epsilon' - i \epsilon''$

Déterminer, en notation complexe, le vecteur  $\underline{P} = \epsilon_0 (\underline{\epsilon}_r - 1) \underline{E}$  et en notation réelle, le vecteur

$$\vec{P} = \text{Re} \left( \underline{P} \right).$$

F.III.2.

Calculer la puissance dissipée par unité de volume dans la matière puis exprimer sa moyenne temporelle en fonction de  $\epsilon''$ ,  $E_0$  et  $\omega$ .

F.III.3.

On veut réchauffer un échantillon de purée de pomme de terre (assimilable à un parallélépipède rectangle de dimensions :  $10 \times 2 \times 5$ , les longueurs étant exprimées en cm) pour laquelle  $\epsilon'' = 25$ .

On rappelle que la fréquence vaut  $f = 2,45$  GHz.

Si on admet que la puissance maximale de 600 W est transférée à la purée, quelle est l'intensité du champ à l'intérieur de la purée ?