

CORRIGE

A. Le modèle de Sir Joseph John Thomson

A.1 En 1897, Thomson mesure la charge de l'électron et propose en 1902 le modèle de l'atome.

A.2 Rutherford, Schrodinger, Bohr, Perrin.

A.3

A.3.a En 1908, Ernest Rutherford entreprit de mesurer la distribution de la charge positive de la sphère du modèle de Thomson. Il projeta des particules α , noyaux d'hélium (composés de 2 protons et de 2 neutrons) au travers d'une plaque d'or afin d'en étudier la diffusion par les atomes. Les résultats qu'il obtint montrèrent indubitablement que la charge positive des atomes ne se trouvait pas répartie dans une sphère de 10^{-8} cm de rayon, comme le prévoyait le modèle de Thomson, mais était au contraire confinée dans un volume beaucoup plus petit, de rayon de l'ordre de 10^{-13} cm.

Cette découverte conduisit Rutherford à réviser en profondeur le modèle atomique de Thomson. Il proposa à la place un modèle de type planétaire où les charges positives, regroupées dans un très petit volume nommé le *noyau atomique*, occupaient une position centrale et les électrons, tels des planètes autour du Soleil, tournaient autour du noyau sur des orbites circulaires ou elliptiques.

L'expérience de Rutherford permit d'estimer la taille du noyau atomique. En effet, les particules α qui ont « rebondi » sur le noyau avec un angle de diffusion de 180° , sont celles qui se sont approchées le plus près de ce dernier.

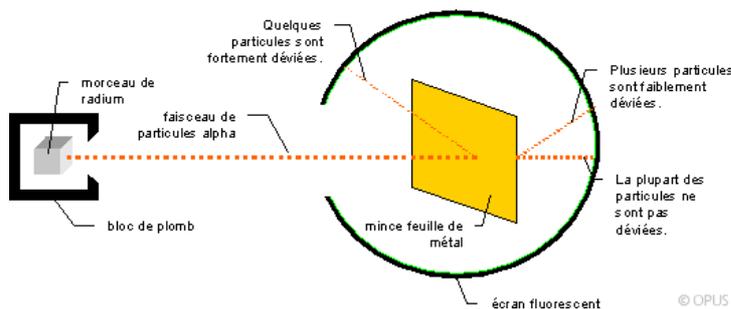
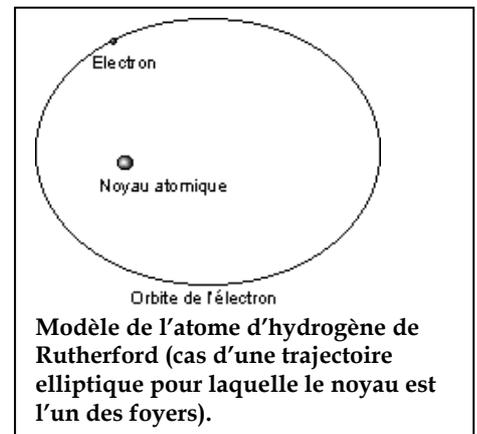
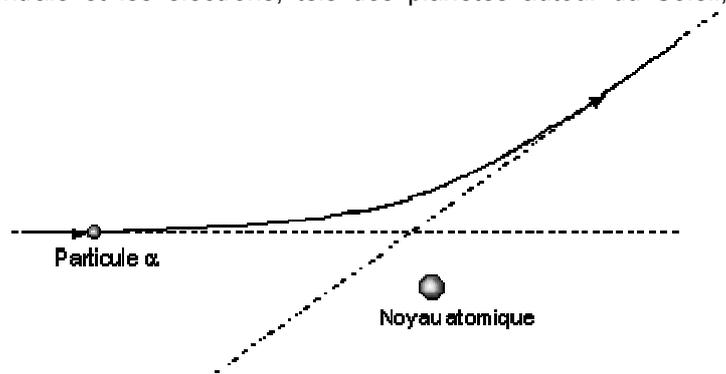
A.3.b

Ze est la charge du noyau cible (noyau contenant Z protons); $2e$ est la charge de la particule α .

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire où R_0 est la distance minimale d'approche de la particule α . Cette distance fournit une limite supérieure à la valeur du rayon du noyau atomique.

Avec une énergie cinétique initiale de 7,7 MeV, $R_0 \approx 3.10^{-14}$ m



B/ Mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène dans le modèle de Thomson.

B.1 La distribution de charge positive de densité $\rho = e / (4/3 \pi R^3)$ crée en tout point M un champ à symétrie

sphérique $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$

Le théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon $r < R$ donne la relation suivante :

$$E(r) \times 4 \pi r^2 = \rho \times 4/3 \times \pi r^3 / \epsilon_0 \text{ soit } E(r) = \rho r / 3 \epsilon_0$$

$$E(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad \text{avec} \quad k = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

B.2.a Il est soumis à une force centrale $\vec{F} = -ek \vec{r}$. Le mouvement est donc plan ou selon une droite (selon les conditions initiales).

En effet, le moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ de l'électron est une constante ; le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_0$ lorsque ce vecteur n'est pas nul.

$$\vec{\sigma}_0 = m \vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0$$

B.2.b L'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + ek \vec{r} = \vec{0}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique spatial de pulsation

$$\omega_0^2 = \frac{ek}{m} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}$$

La trajectoire dépend des conditions initiales : position M_0 et vecteur vitesse \vec{v}_0 .

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 \cos(\omega_0 t) + (\vec{v}_0 / \omega_0) \sin(\omega_0 t)$$

B.2.c $R = 10^{-10}$ m ; rayon plus grand que celui prévu par Rutherford mais il correspond au rayon d'un atome.

B.3.a $\vec{\pi} = -e a \vec{e}_r$; $p_x = p_0 \cos(\omega_0 t)$; $p_y = p_0 \sin(\omega_0 t)$ avec $p_0 = -e a$

B.3.b $E_M = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k e a^2 = k e a^2 = m \omega_0^2 a^2 = m \omega_0^2 p_0^2 / e^2$ car $v = a \omega_0$ et $ke/m = \omega_0^2$

C.1.

$$\begin{aligned} \text{Maxwell - Ampère : } \text{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{Conservation du flux } \text{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \text{Maxwell - Faraday : } \text{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{Maxwell - Gauss } \text{div}(\vec{E}) &= 0 \end{aligned}$$

C.2.a Elle doit vérifier l'équation de propagation, déduite des équations de Maxwell :

Cette équation est vérifiée pour $k = \omega / c$; la direction de propagation est celle de l'axe $x'x$;

C'est une onde monochromatique rectiligne progressive

se propageant dans le sens de \vec{e}_x ; $\vec{k} = k \vec{e}_x$

$$\Delta \vec{E} - 1/c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec } \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

C.2.b

$\vec{B} = (E_0/c) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$; (\vec{E} , \vec{B} , \vec{e}_x)
forment un trièdre direct.

C.2.c La direction de \vec{R} correspond à la direction de propagation de l'énergie ; le flux de \vec{R} à travers une surface S correspond à l'énergie transmise par unité de temps à travers cette surface. Son unité est le watt par m² (W.m⁻²).

$$\vec{R} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x ; \quad \langle \vec{R} \rangle$$

$$= (\epsilon_0 c E_0^2 / 2) \vec{e}_x$$

C.3 $P_0 = \epsilon_0 c S E_0^2 / 2$; $E_0 = 8,7 \times 10^3$ V/m

C.4.a Le champ garde une amplitude constante E_0 ; Le vecteur \vec{E} tourne autour de l'axe Ox avec une vitesse angulaire ω .

C.4.b

$$\vec{B} = E_0 / c [\cos(\omega t - kx) \vec{e}_z - \sin(\omega t - kx) \vec{e}_y] ; \quad \vec{R} = \epsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_x$$

Le vecteur de Poynting indépendant du temps et de x : $\vec{R} = \langle \vec{R} \rangle = \epsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_x$

D.1 Le dipôle est assimilé à deux charges (+q, -q) situé à une distance d. Le courant qui circule entre les deux charges est équivalent à un élément de courant $\ell \cdot dq/dt \vec{e}_z = dp/dt \vec{e}_z$. Tout plan passant par l'axe Oz est un plan de symétrie pour le système.

Le champ électrique est dans ce plan (E_r et E_θ) et le champ \vec{B} créé est perpendiculaire à ce plan (B_ϕ).

D.2 Ce n'est pas une onde plane puisque l'amplitude des champs dépend de r et de θ . On peut la qualifier de quasi-plane car \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires, transversaux et le rapport de leur amplitude est $E/B = c$.

D.3

$$\vec{R} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4 \sin^2 \theta p_0^2}{r^2} \cos^2[\omega(t - r/c)]$$

$$\vec{e}_r \quad \langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4 \sin^2 \theta p_0^2}{r^2} \vec{e}_r$$

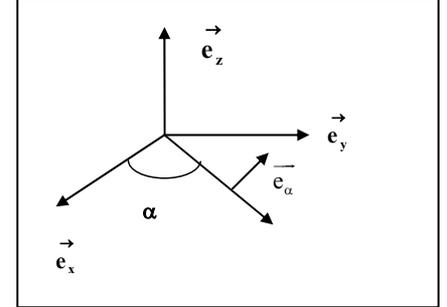
D.4 La puissance moyenne rayonnée est :

$$P_R = \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \text{ soit}$$

$$P_R = \frac{\omega^4 \cdot p_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

E. Rayonnement de l'électron de l'atome d'hydrogène de Thomson

E.1 C'est une onde plane monochromatique polarisée rectilignement.



$$\vec{E} = \left\{ \frac{-\omega^2 \sin \alpha \cdot p_0}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \cos [\omega (t-r/c)] + \frac{\omega^2 \cos \alpha \cdot p_0}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin [\omega (t-r/c)] \right\} \vec{e}_\alpha$$

$$\vec{E} = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin [\omega (t-r/c) - \alpha] \vec{e}_\alpha$$

E.2

En P, le dipôle p_x crée un champ

$$E_x = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \cos [\omega (t-r/c)] \vec{e}_x$$

En P, le dipôle p_y crée un champ

$$E_y = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin [\omega (t-r/c)] \vec{e}_y$$

Le champ \vec{E} en P est donc une onde circulaire les composantes E_x et E_y ont la même amplitude et sont déphasées de $\pi/2$.

E.3.a

$$P_R = \frac{\omega^4 \cdot p_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \text{ or } E_M = m \omega^2 p_0^2 / e^2$$

Si E_M décroît alors $|p_0|$ diminue et a diminue aussi.

E.3.b $-dE_M/dt = E_M/\tau$ avec $\tau = 6m \pi \epsilon_0 c^3 / \omega^2 e^2$; $E_M = E_0 \exp(-t/\tau)$

E.3.c A.N : $t = 8,5 \cdot 10^{-9} \text{ s} \gg T_0 = 1,45 \cdot 10^{-15} \text{ s}$

L'approximation qui admet que l'énergie décroît lentement est valable. C'est le modèle classique de l'électron qui est à rejeter !

F. Diffusion Rayleigh

F.1

$$\vec{d}^2 \vec{r} / dt^2 + k \vec{e} \vec{r} = -e \vec{E}$$

En projection sur l'axe z : on obtient l'équation différentielle du mouvement suivant z.
On néglige évidemment le poids et la force de Lorentz $-e(\vec{v} \wedge \vec{B})$ car $E/B = c$.

$$\ddot{z} + \omega^2 z = (-e/m) E_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\begin{aligned} \text{F.2.a } z &= [e / (m (\omega_0^2 - \omega^2))] E_0 \cos(\omega t - kx) \\ \text{F.2.b } p_z &= [e^2 / (m (\omega_0^2 - \omega^2))] E_0 \cos(\omega t - kx) \\ &\text{avec } p_0 = e^2 E_0 / (m (\omega_0^2 - \omega^2)) \\ \text{F.3 } P_R &= \frac{\omega^4 \cdot p_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\omega^4 \cdot e^4 E_0^2}{12\pi\epsilon_0 m^2 c^3 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \\ \text{F.4 } P_R &= \frac{\omega^4 e^4 P_i}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4 S (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \\ \text{F.5.a } P_i(x) - P_i(x+dx) &= NS dx P_R \end{aligned}$$

$NSdx$ atomes diffusent de l'énergie dans ce volume Sdx : $N \cdot S \cdot P_R = -dP_i / dx$

$$\begin{aligned} dP_i/dx &= -P_i / \ell ; \\ \ell &= \frac{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}{N\omega^4 \cdot e^4} ; \end{aligned}$$

ℓ s'exprime en mètre d'après l'équation différentielle.

F.5.b ;

$$\ell = \frac{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4 \cdot \omega_0^4}{N\omega^4 \cdot e^4}$$

AN $\ell = 1500 (\lambda / \lambda_1)^4$ en m , $\ell_R = 2790$ km , $\ell_B = 174$ km

F.5.c La lumière diffusée est plus riche en radiations bleu qu'en radiation rouge

$$P_R(B)/P_R(R) = (\lambda_R / \lambda_B)^4$$

Pour l'absorption, ℓ est proportionnelle à λ^4 : c'est le rouge qui est le moins absorbé que le bleu . Le soir le soleil couchant est rouge car la lumière traverse une plus grande couche d'atmosphère .

Effet Zeemann

$$G.1 \quad m \cdot d\vec{v} / dt = -m \omega_0^2 \vec{OP} - e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2 \Omega \dot{y} \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = +2 \Omega \dot{x} \quad ; \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

$$G.2 \quad z(t) = a \cdot \sin \theta \cdot \cos \omega_0 t.$$

$$G.3.a \quad Z = x + iy \quad Z'' - 2i \Omega Z' + \omega_0^2 Z = 0$$

$$G.3.b \quad \Delta' = -(\Omega^2 + \omega_0^2) \approx -\omega_0^2 \quad Z(t) = \exp(i \Omega t) [z_1 \exp(i \omega_0 t) + z_2 \exp(-i \omega_0 t)]$$

$$t=0 : Z = -ia \cos \theta \quad ; \quad dZ/dt = \omega_0 a$$

$$Z(t) = (ia/2) e^{i\Omega t} [(1 - \cos \theta) e^{-i\omega_0 t} - (1 + \cos \theta) e^{i\omega_0 t}]$$

$$G.3.c \quad x = a/2 [(1 + \cos \theta) \sin(\Omega + \omega_0)t - (1 - \cos \theta) \sin(\Omega - \omega_0)t]$$

$$y = a/2 [-(1 + \cos \theta) \cos(\Omega + \omega_0)t + (1 - \cos \theta) \cos(\Omega - \omega_0)t]$$

G.3.d Donc le mouvement est la superposition :

- d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_0 le long de Oz ;
- d'un mouvement circulaire de pulsation $(\Omega + \omega_0)$ et d'amplitude $a/2 (1 + \cos \theta)$ (sens direct)
- d'un mouvement circulaire d'amplitude $a/2 (1 - \cos \theta)$ et de pulsation $(\omega_0 - \Omega)$ (sens rétrograde)

$$G.3.e \quad p_z = -e \cdot a \sin \theta \cos \omega_0 t$$

$$p_x = -e \cdot x = -ea/2 [(1 + \cos \theta) \sin(\Omega + \omega_0)t - (1 - \cos \theta) \sin(\Omega - \omega_0)t]$$

$$p_y = -e \cdot y = -e a/2 [-(1 + \cos \theta) \cos(\Omega + \omega_0)t + (1 - \cos \theta) \cos(\Omega - \omega_0)t]$$

G.4 On se place donc sur l'axe Oz. Le mouvement selon Oz ne rayonne pas de l'énergie.

- Le mouvement de pulsation $\omega_0 + \Omega$ émet une onde polarisée circulairement donc de fréquence $\nu_0 + \Delta \nu$
 - Le mouvement de pulsation $\omega_0 - \Omega$ émet une onde polarisée circulairement donc de fréquence $\nu_0 - \Delta \nu$
- $$\Delta \nu = \Omega / 2 \pi = eB_0 / 4 \pi m \quad \Delta \nu = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Hz} \quad ; \quad \Delta \nu / \nu_0 = 2 \cdot 10^{-6}$$

G.5 On se place dans le plan xOy.

- Le mouvement selon Oz émet une onde polarisée rectilignement suivant Oz, de pulsation ω_0 .
- Le mouvement circulaire de pulsation $\omega_0 + \Omega$ émet une onde polarisée rectilignement dans le plan xOy de pulsation $\omega_0 + \Omega$.
- Le mouvement circulaire de pulsation $\omega_0 - \Omega$ émet une onde polarisée rectilignement dans le plan xOy de pulsation $\omega_0 - \Omega$.

L'onde émise est une superposition de trois ondes polarisées rectilignement de fréquences :

$$\nu_0, \nu_0 + \Delta \nu \text{ et } \nu_0 - \Delta \nu.$$

H .Détermination des raies dues à l'effet Zeeman

H.1.a Avec une source ponctuelle ,on obtient des franges non localisées

Dans l'interféromètre de Michelson avec une source ponctuelle réalisée avec un laser et un objectif de microscope :

Miroirs perpendiculaires : sources secondaires situées sur l'axe de symétrie ; anneaux non localisés

Miroirs à égales distances mais inclinés : sources secondaires décalées franges non localisées
Exemples de dispositif à division de front d'onde : les miroirs de Fresnel, fentes d'Young

Avec une source étendue les franges non localisées se brouillent .

Par division d'amplitude , on obtient alors des franges localisées sur des surfaces.

Dans le cas de l'interféromètre de Michelson

Miroirs parallèles équivalent à une lame d'air : anneaux d'égales inclinaisons localisés à l'infini.

Miroirs équivalent à un coin d'air : franges rectilignes localisées au voisinage des miroirs (pour le Michelson : sur les miroirs ou à l'infini)

H.1.b La différence de marche entre les ondes qui interfèrent doit être inférieure à la longueur de cohérence pour avoir un bon contraste .

H.2.a On observe la teinte plate.

H.2.b Le diaphragme permet de se placer dans les conditions de l'optique de Gauss.

H.3.a

Si M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice, alors , pour un rayon quelconque tel que (1), les trajets réels : KM et MN sont égaux aux trajets symétriques : KM' et $M'N$. On peut remplacer le miroir M_2 par son symétrique M'_2 et constater alors que l'interféromètre est équivalent à une lame d'air d'épaisseur e , distance entre M_1 et M'_2 .

Les réflexions sur les faces de la lame créent des rayons réfléchis parallèles qui interfèrent à l'infini. Les franges sont observées dans le plan focal image de la lentille d'observation.

Les éléments de symétrie du problème permettent de préciser que les franges seront de révolution autour de Oy. Ce sont donc des anneaux.

H.3.b La différence de marche (2) - (1) est

pour des angles i petits .

δ est une fonction décroissante de i .

$$\delta = 2e \cos i \approx 2e \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda}$$

Au centre de l'écran ($i = 0$) l'ordre d'interférence est :

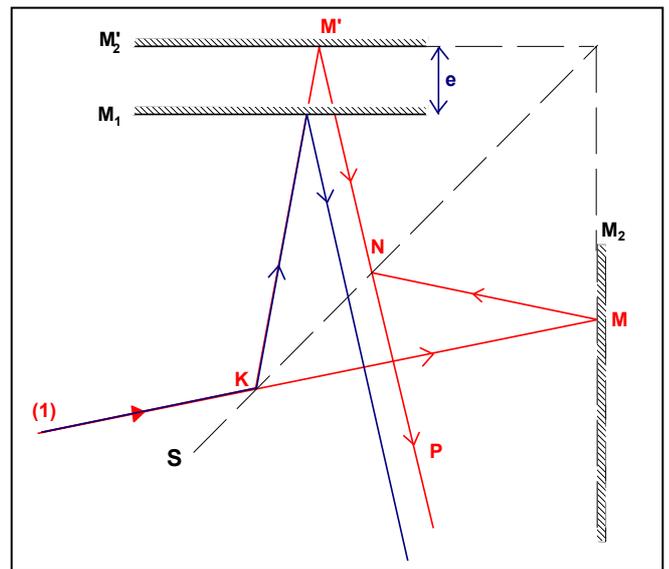
C'est la valeur maximale de p !

Le premier anneau brillant a pour ordre : $p_1 = E(p_0)$

Pour cet anneau

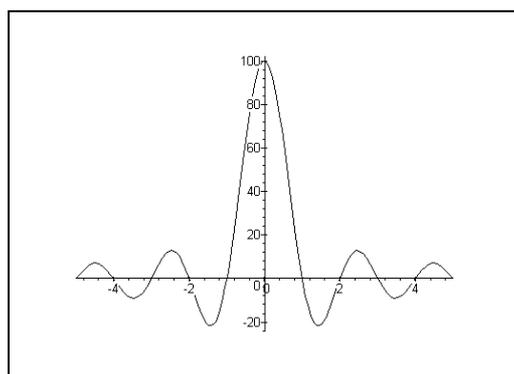
Avec les valeurs numériques données $p_0 = 4837,6$

$r_1 \approx 1,6$ cm

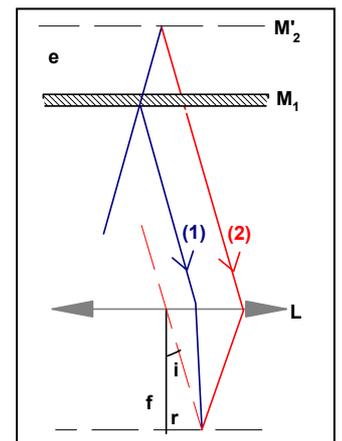


$$1 - i^2/2 = \frac{p_1}{p_0} \text{ son rayon est}$$

$$r_1 = f \cdot i = f \left[2 \frac{p_0 - E(p_0)}{p_0} \right]^{1/2}$$



C24



H.4.a. On a une multiplicité de systèmes d'interférences. L'intensité totale est :

$$I = \int_{v_1 - \Delta v}^{v_1 + \Delta v} \frac{I_0 dv}{\Delta v} \left[1 + \cos \frac{2\pi\delta}{c} v \right] = I_0 \left[1 + \text{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta v \right) \cos \left(\frac{2\pi\delta}{c} v_0 \right) \right]$$

La visibilité est donc

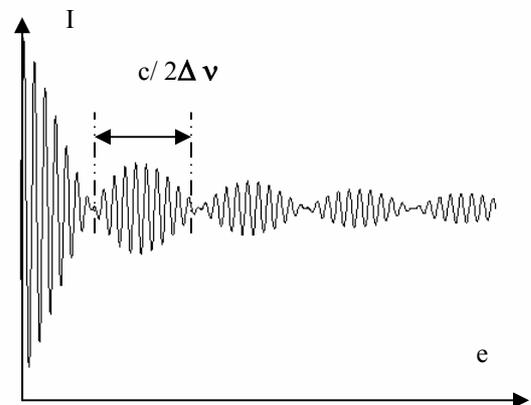
H.4.b

$$V = \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi 2e}{c} \Delta v \right) \right| \quad \delta = 2e$$

V s'annule pour la première fois lorsque $2e = \frac{c}{\Delta v}$. La longueur de cohérence vaut $L_c = c / \Delta v = 2e$

H.5.a Le phénomène observé est la superposition de deux systèmes d'interférences ayant des interférences légèrement différents. Dans la position initiale il y a coïncidence: les franges brillantes de chaque système sont aux mêmes endroits. Dans la position finale il y a anticoincidence: les franges brillantes de l'un et les franges sombres de l'autre sont situées aux mêmes endroits.

L'intensité lumineuse est égale à :



$$I = 2I_0 \left(1 + \cos v_1 \frac{4\pi e}{c} \right) + 2I_0 \left(1 + \cos v_2 \frac{4\pi e}{c} \right) = 4I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi e}{c} \Delta v \right) \cdot \cos \left(v_0 \frac{4\pi e}{c} \right) \right]$$

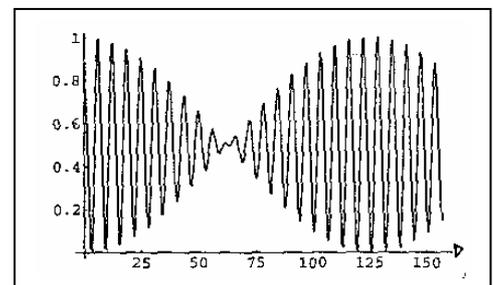
H.5.b

H.5.c Il n'y a plus de différence d'intensité entre les franges lorsque :

$$V = \cos \left(\frac{4\pi e \Delta v}{c} \right) = 0$$

c'est à dire pour $e = (2k+1)c / (8 \Delta v)$

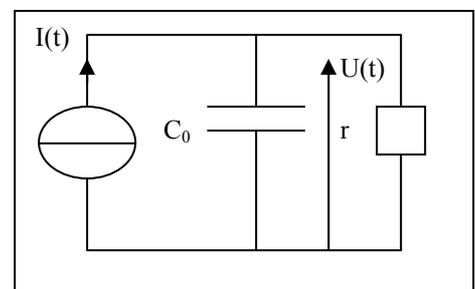
H.5.c En mesurant la position du miroir entre deux disparitions on a accès à Δv .



H.5.d Avec un Perot-Fabry, la précision sera meilleure.

G. Détection et Traitement du signal .

I.1.a $I = u/r + C du/dt$ pour $t > 0$



I.1.b $u(t) = r[1 - \exp(-t/\tau)]$ avec $\tau = rC_0$

Le temps de réponse à 5% :

$$\exp(-t_R/\tau) = 0,05 \quad t_R = 2,25 \text{ ns}$$

I.1.c On peut alors négliger le temps de réponse du détecteur ;

La tension $u(t)$ suit les variations de $I(t)$ $u(t) = r \cdot I(t)$ donc les variations de l'éclairement $E(t)$.

I.2.a

Appliquer la loi des noeuds en C et D . On obtient facilement $V_A - V_B = (2R'/R_0 + 1)(u_1 - u_2)$

I.2 b

A l'entrée de AO3 on applique la loi des noeuds en + et en - puis $V_+ = V_-$

$$(V_A R_2 + V_{S1} \cdot R_1) / (R_1 + R_2) = V_B R_4 / (R_4 + R_3)$$

$$V_{S1} = V_B (R_1 + R_2) (R_4 / R_1) / (R_4 + R_3) - V_A (R_2 / R_1)$$

Il suffit de prendre $R_4 R_1 = R_2 R_3$

$$V_{S1} = (R_2 / R_1) (V_B - V_A)$$

I.2.c

Les AO 1 et 2 ont des impédances d'entrée infinies ; la tension $u = u_1 - u_2$ n'est pas perturbée .

L'ampli O3 est un soustracteur

L'ensemble est un amplificateur différentiel

I.3.a L'AO4 fonctionne à un montage non inverseur , de gain $\beta = (1 + R_5/R_6)$

$$V_{S2} = \beta V_{S1} ; V_{S1} = -(R_2/R_1) (2R'/R_0 + 1) u(t)$$

I.3.b

Le filtre RC est un filtre passe haut qui supprime la composante continue.

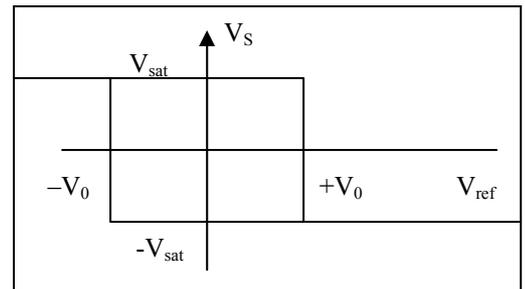
La fréquence de coupure du filtre est $f_c = 1/RC \ll f_D$ (du signal) pour que le signal ne soit pas déformé.

I.3.c Il fonctionne en comparateur à hystérésis

$$V_{Ref} = \pm V_{sat} R_7 / (R_7 + R_8) = \pm V_0$$

$$V_{ref} = \pm 0,01 V_{sat}$$

Ce comparateur va permettre de ne conserver que les maximums du signal et de supprimer le bruit qui peut se superposer au signal initial.



I.4 Les résistances R_9 et R_{10} jouent un rôle de diviseur de tension donc $V_S = V_{S4}/3$

La diode ne conserve que la partie positive du signal.

I.5 Le compteur compte 4464 impulsions correspondant à un déplacement $2e = 4464 \lambda_0$

$$\text{soit } \lambda_0 = 121,9 \text{ nm} ; v_0 = 2,46 \cdot 10^{15} \text{ Hz} ; \Delta v = c/4e = 2,8 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$$

J. Température dans un conducteur isolé thermiquement et parcouru par un courant d'intensité I.

J.1.a

$$\vec{j}_Q = -\lambda \text{ grad } T$$

λ conductivité thermique en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

$$J.1.b \quad dP_J = dR I^2 = (dx / s \gamma) I^2$$

$$J.1.c \quad -s dj/dx + I^2 / s \gamma = \rho c s \partial T / \partial t$$

J.1.d

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{I^2}{\gamma s^2 \lambda} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

J.2.a En régime permanent, T ne dépend plus du temps :

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = -K I^2 \text{ avec } K = 1/\gamma\lambda s^2$$

J.2.b $K = 10,42 \text{ K.m}^{-2}\text{A}^{-2}$

J.2.c $T(x) = -K I^2 L^2/2 [(x/L)^2 - x/L] + (T_2 - T_1) x/L + T_1$

J.2.d T(x) passe par un maximum pour : $x_{\max} = \Delta T / K I^2 L + L/2$

Il faut que $x_{\max} < L$ et donc $I^2 > 2 \Delta T / K L^2$.

J.2.e $I > I_1 = 4,38 \text{ A}$.

J.3.a $\lambda s \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{I^2}{s \gamma} - h I T = 0$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{I^2}{\gamma s^2 \lambda} - \frac{h I}{\lambda s} \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

J.3.b $I_2 = \gamma h s \Delta T / L$;

J.3.c $I_2 = 26,4 \text{ mA}$.