

CHAPITRE XI : CONDUCTION DE LA CHALEUR

Après l'accumulation de connaissances empiriques, la théorie de la conduction de la chaleur est née au début du siècle dernier sous l'impulsion du mathématicien français Fourier (1768-1830).

S'appuyant sur la conception erronée du phlogistique, il considère la chaleur comme intrinsèquement contenue dans tous les corps et susceptible de se déplacer d'un point à un autre. Nous savons bien aujourd'hui que la chaleur n'est pas plus que le travail ne peuvent se transporter car ce ne sont pas des fonctions d'état. Il s'agit tout bonnement en fait d'un **transfert d'énergie**. Toutefois, quand on étudie des systèmes à volume ou à pression constante, la chaleur s'identifiant à l'énergie interne ou à l'enthalpie peut effectivement se transporter ce qui justifiera de notre part quelques écarts de langage quand nous parlerons de conduction de la "chaleur".

I: LES DIFFERENTS MODES DE CONDUCTION DE L'ENERGIE

Un certain nombre de constatations empiriques et expérimentales permettent de constater qu'il existe des transferts d'énergie des régions les plus chaudes vers les régions les plus froides quand existe dans un milieu une hétérogénéité de température.

Ces transferts se font généralement selon trois modes distincts :

- 1) La **conduction** qui correspond à une diffusion microscopique.
- 2) La **convection** qui correspond à un transport macroscopique.
- 3) Le **rayonnement** qui est la propagation d'une onde électromagnétique. C'est le principe de base des radiateurs à rayonnement I.R.

Ces trois modes coexistent toujours plus ou moins ensemble ce qui rend extrêmement difficile la maîtrise des techniques de chauffage ou d'isolation. Dans la suite de ce cours, on n'étudiera que la conduction et on se placera donc dans les conditions expérimentales suivantes :

- Absence de courants de convection.
- Rayonnement du corps négligeable.

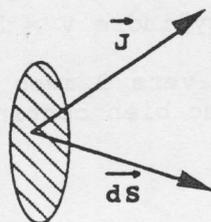
La convection est généralement inexistante dans un solide. Dans un gaz ou un liquide, on l'évitera au maximum en chauffant le système par le haut. Le rayonnement est faible pour les gaz, on peut difficilement l'éviter pour des solides.

II: ETUDE MACROSCOPIQUE DE LA CONDUCTION DE L'ENERGIE

2-1 : Vecteur densité de courant d'énergie.

On considère un milieu isotrope au sein duquel existe une distribution de température $T(\vec{r}, t)$, \vec{r} étant le vecteur position d'un point M du matériau et t l'instant où l'on mesure la température. L'hétérogénéité de température donne naissance à un courant d'énergie dans le matériau. Le vecteur densité de courant d'énergie \vec{J} est tel que l'énergie $d\mathcal{E}$ qui traverse une surface $d\vec{S}$ orientée

pendant dt vaille : $d\mathcal{E} = \vec{J} \cdot d\vec{S} dt$



$$[\vec{J}] : \frac{W}{m^2}$$

2-2 : Loi phénoménologique de Fourier.

2-2-1 : Cas unidimensionnel.

On suppose que la température ne varie que selon une direction Ox. La température est une fonction de x et du temps t : $T(x,t)$. Si on reste dans une physique linéaire, on peut admettre une relation de proportionnalité entre l'effet (le vecteur densité de courant d'énergie \vec{J}) et la cause (gradient de température). On a donc un courant d'énergie selon Ox tel que :

$$J_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Ceci constitue la loi de Fourier. λ est appelée conductivité thermique du matériau et s'exprime en $\text{W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$.

2-2-2 : Généralisation.

A trois dimensions, on a de manière analogue à la diffusion des particules proportionnalité entre le vecteur densité de courant d'énergie et le gradient de température.

$$\vec{J} = -\lambda \text{grad}T$$

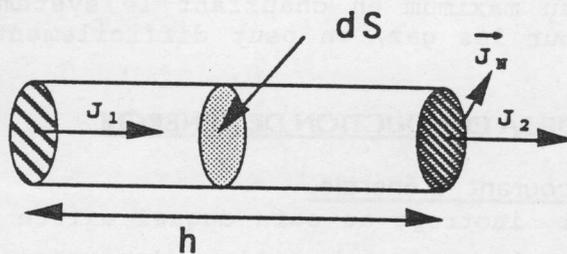
2-3 : Propriétés de continuité.

2-3-1 : Théorème de continuité.

A la traversée de la surface de séparation de deux milieux et s'il n'existe pas en surface de sources de chaleur, on a continuité de la composante normale du vecteur densité de courant d'énergie.

2-3-2 : Démonstration.

Considérons un petit cylindre de hauteur h ayant pour surface de base un disque de rayon r et traversant la surface de séparation dS.



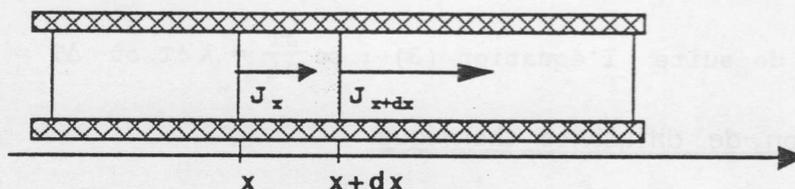
Appelons J_1 le vecteur densité de courant normal à la surface dans le matériau 1, J_2 le vecteur correspondant dans le matériau 2 et J_N le vecteur densité de courant sur la surface latérale. La variation $d\mathcal{E}$ d'énergie dans ce petit cylindre pendant dt vaut : $d\mathcal{E} = (J_2 - J_1)dS + 2\pi r h J_N dt$. Elle est bien entendue proportionnelle au volume du cylindre $V = h \times dS$ puisqu'il y n'a pas de source externe de chaleur.

Si on fait tendre alors h vers 0 avec dS petit mais fini, on constate que $(J_2 - J_1)$ tend vers 0. On a donc bien continuité de la composante normale de J à la traversée d'une surface.

2-4 : Equation de la chaleur.

2-4-1 : Cas unidimensionnel.

On se propose de trouver la distribution de température dans un cas unidirectionnel. On étudie le cas d'un solide ou d'un gaz parfait à pression ou à volume constante de sorte que l'énergie transportée e s'identifie à l'énergie interne ou à l'enthalpie. On note alors e l'énergie volumique du système et on appelle $u(x,t)$ l'énergie créée par unité de volume et de temps dans le matériau au point d'abscisse x et à la date t , par exemple par effet joule.



A partir d'un cylindre de matière calorifugé et de base dS , faisons un bilan analogue à la diffusion :

En x , il entre l'énergie $J_x(x,t)dSdt$. Il sort en $x+dx$ l'énergie $J_x(x+dx,t)$ et il est créé dans le volume l'énergie $u dSdxdt$. La variation d'énergie pendant dt est égale à $de dSdx$ et vaut donc :

$$(1) \quad de dSdx = dSdt(-J_x(x+dx,t) + J_x(x,t)) + u dSdxdt$$

Au second ordre près en dx , on a : $J_x(x+dx,t) - J_x(x,t) = \frac{\partial J_x}{\partial x} dx$

En divisant (1) par $dSdxdt$, il vient alors :

$$(2) \quad \frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial J_x}{\partial x} + u$$

C'est la forme classique d'une équation de conservation.

2-4-2 : Raisonement à trois dimension.

La généralisation à trois dimension est immédiate, nous aurons :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{J} + u \quad \text{avec} \quad \operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

2-5 : Equation de la chaleur couplée avec la loi de Fourier.

2-5-1 : Cas unidimensionnel.

Les hypothèses précédentes étant vérifiées, on suppose en outre que l'énergie volumique du corps étudié ne dépend que de la température. C'est une hypothèse convenable pour les gaz sous faible pression ou les solides.

Si on note e l'énergie volumique, ρ la masse volumique du corps étudié et c sa chaleur massique, on a alors $e = \rho c T$.

On suppose $u = 0$ et on néglige les variations faibles du produit ρc de sorte que :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

La loi de Fourier couplée à l'équation (2) donne alors :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

2-5-2 : Raisonnement à trois dimensions.

On obtient de suite l'équation (3) : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$ où $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

2-6 : Notion de diffusivité thermique.

L'équation (3) peut se réécrire $\frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{D} \Delta T$ où $\mathcal{D} = \frac{\lambda}{\rho c}$. L'équation de la chaleur est alors strictement l'analogue de l'équation de la diffusion. Pour cette raison \mathcal{D} est appelée diffusivité thermique.

Le temps typique de diffusion de la chaleur à une distance L vérifie donc :

$$T_{\text{diff}} = \frac{L^2}{\mathcal{D}}$$

La chaleur diffuse d'autant mieux que \mathcal{D} est grand. On notera d'ailleurs l'interprétation physique de \mathcal{D} . \mathcal{D} est le rapport entre la capacité du milieu à conduire la chaleur (ce qui facilite la diffusion) et sa capacité ρc à accumuler de l'énergie (ce qui défavorise la diffusion).

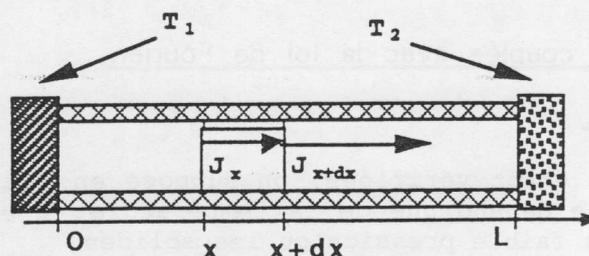
III: EXERCICES D'APPLICATION SIMPLES EN RÉGIME PERMANENT.

3-1 : Problèmes unidirectionnels avec $u = 0$.

Comme dans le cas de la diffusion, on écrira dans tous les cas la conservation du débit d'énergie en régime indépendant du temps.

3-1-1 : Problème unidimensionnel.

On considère le cas analogue à celui de la diffusion d'un solide cylindrique calorifugé de longueur L , de surface de base S et dont on impose la température aux deux extrémités.



La conservation du débit d'énergie impose ici $J_x = \text{constante}$. Cette relation couplée avec la loi de Fourier et les conditions aux limites donne, de manière analogue à la diffusion, le profil linéaire suivant de température :

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L}$$

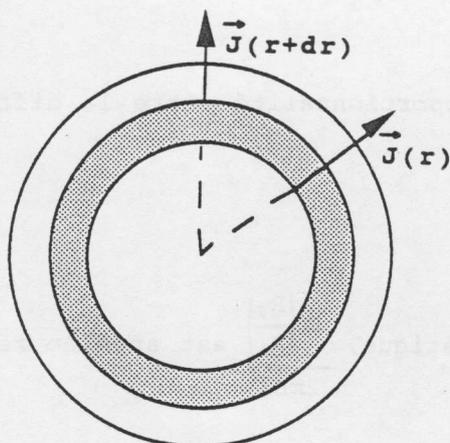
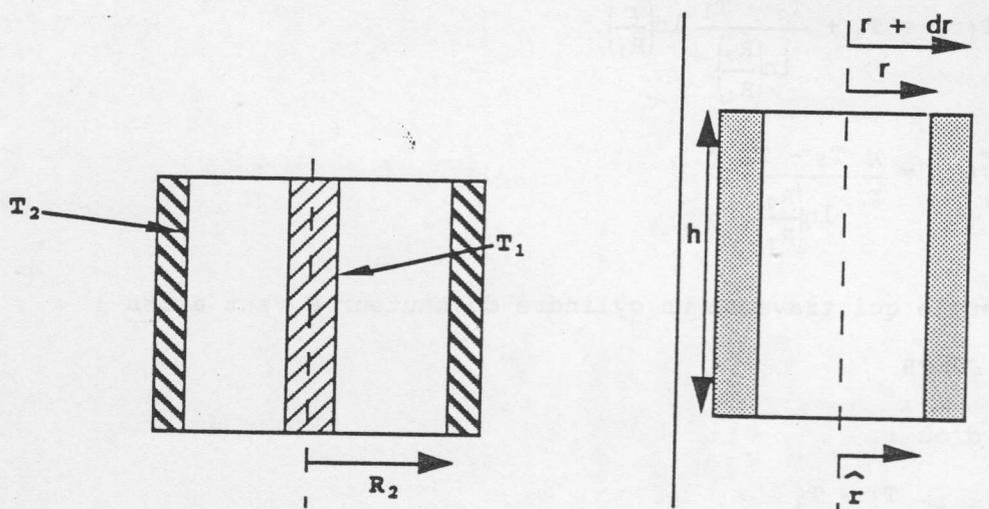
Ce régime stationnaire indépendant de la conductivité λ est toutefois atteint d'autant plus rapidement que λ est grand.

3-1-2: Problème unidirectionnel à symétrie cylindrique.

Nous traitons ici le cas d'un matériau cylindrique homogène de hauteur H très grande vis à vis de son rayon R , de sorte qu'on néglige tout effet de bord. On appelle r la distance d'un point du système à l'axe du cylindre et λ la conductivité thermique du matériau.

Par symétrie, on a ici une distribution de température à symétrie cylindrique. La température T du système ne dépend que de r et les lignes de courant sont donc radiales à partir de l'axe : $\vec{J} = J(r)\hat{r}$ où \hat{r} est un vecteur unitaire radial. Un thermostat impose la température T_1 en $r = R_1$ et un autre thermostat la température T_2 en $r = R_2$.

Raisonnons sur une petite coquille cylindrique de hauteur h comprise entre les cylindre de rayon r et $r + dr$. En r , il entre l'énergie $\{J(r)2\pi r h\}_r$. En $r + dr$, il sort l'énergie $\{J(r)2\pi r h\}_{r+dr}$. S'il n'y a pas de création d'énergie ($u = 0$), on a égalité de ces deux quantité en régime permanent.



Vue de dessus

On en déduit que $rJ(r) = \text{constante}$. Appelons A la constante en question, on a donc : $J(r) = \frac{A}{r}$.

La loi de Fourier implique $\vec{J} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda \frac{dT}{dr} \hat{r}$.

Les deux équations couplées donnent donc :

$$(1) \frac{dT}{dr} = \frac{B}{r} \quad \text{où } B = -\frac{A}{\lambda} \text{ est une nouvelle constante.}$$

Intégrons l'équation avec des bornes convenables et après séparation des variables :

$$\int_{T_1}^{T_2} du = \int_{R_1}^r \frac{Bdv}{v} \quad \text{d'où : } T(r) = T_1 + B \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

La condition $T(R_2) = T_2$ permet d'éliminer B . On a en effet :

$$T_2 = T_1 + B \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

$$\text{On en déduit : } T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

$$\text{On a alors : } \vec{J}(r) = \frac{\lambda}{r} \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \hat{r}$$

Le courant d'énergie qui traverse un cylindre de hauteur H vaut alors :

$$I = J 2\pi r H$$

d'où :

$$I = 2\pi H \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left[\frac{R_2}{R_1}\right]}$$

On observe une relation de proportionnalité entre la différence de température et le courant d'énergie:

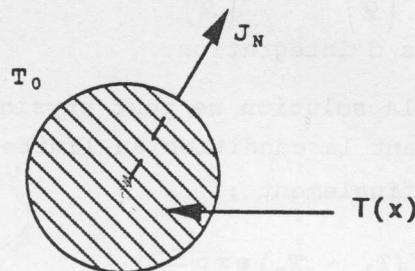
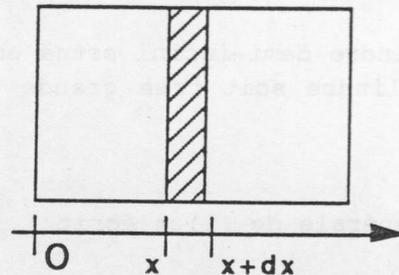
$$T_1 - T_2 = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi H \lambda} I$$

Par analogie avec l'électrocinétique, $\frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi H \lambda}$ est appelée résistance thermique de la hauteur H de matériau.

3-1-3 : Cas d'un cylindre non calorifugé

3-1-3-1 : Loi de Newton.

On considère une tranche de matériau d'épaisseur dx , de surface de base dS , non calorifugée et en contact avec l'atmosphère à température T_0 . L'expérience montre qu'il existe un vecteur densité de courant d'énergie du barreau vers l'atmosphère normal à la tranche valant $J_N = \alpha(T(x) - T_0)$.



Vu en coupe du barreau

3-1-3-2 : Profil de température.

Faisons un bilan d'énergie dans une petite tranche d'épaisseur dx . L'énergie entrant algébriquement par les plans de coupe pendant la durée dt vaut comme précédemment $-\frac{\partial J_x}{\partial x} S dx dt$. Il convient d'y ajouter l'énergie qui traverse la surface latérale soit $-\alpha(T(x) - T_0) 2\pi R dx dt$ où R est le rayon du barreau cylindrique. Le signe - provient de ce que l'énergie s'échappe du barreau quand $T(x) > T_0$. Le bilan global après division par $S dx dt$ s'écrit (en gardant les notations précédentes) :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{2\pi R \alpha}{S} (T(x) - T_0)$$

Cette équation de conservation couplée avec la loi de Fourier et l'expression de l'énergie interne volumique donne de suite :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\pi R \alpha}{S} (T(x) - T_0) = 0 \text{ en régime permanent.}$$

Nous poserons $\mathcal{T}(x) = T(x) - T_0$ dans la suite de ce cours.

$\mathcal{T}(x)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(1) \quad \frac{d^2 \mathcal{T}(x)}{dx^2} - \frac{1}{\mathcal{L}^2} \mathcal{T}(x) = 0$$

où $\mathcal{L} = \sqrt{\frac{s\lambda}{2\pi R\alpha}}$ est par homogénéité une longueur caractéristique du problème.

Considérons maintenant un cylindre demi-infini situé entre 0 et $+\infty$ (Il suffit en fait que la longueur L du cylindre soit très grande devant \mathcal{L}). On impose $T(x=0) = T_1$.

La solution la plus générale de (1) s'écrit :

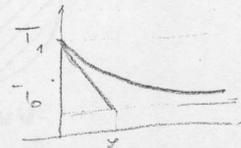
$$\mathcal{T}(x) = A \exp\left(\frac{x}{\mathcal{L}}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\mathcal{L}}\right)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration.

A est forcément nulle car la solution ne peut physiquement diverger en $x = \infty$. On détermine alors B en écrivant la condition au limite. : $\mathcal{T}(x=0) = T_1 - T_0$.

On a donc finalement :

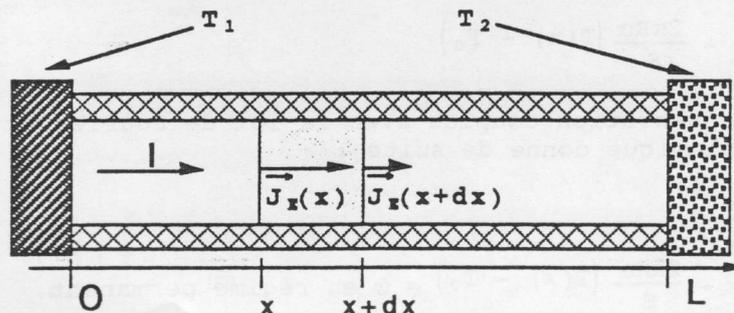
$$T(x) = T_0 + (T_1 - T_0) \exp\left(-\frac{x}{\mathcal{L}}\right)$$



Le barreau tend donc à se mettre en équilibre thermique avec la barre sur une échelle de longueur égale à \mathcal{L} . Cette longueur est d'autant plus petite que le milieu est mauvais conducteur (λ petit) et les transferts latéraux d'énergie importants.

3-2 : Profil de température d'une barre chauffée par effet Joule.

On étudie à nouveau la configuration du 3-1-1 et on suppose que le barreau est aussi un conducteur électrique parcouru par un courant I constant. On appelle σ la conductivité électrique du matériau, \vec{J} le vecteur densité de courant électrique et \vec{J}_E le vecteur densité de courant d'énergie.



Considérons un volume élémentaire dV de matériau. Il contient la charge élémentaire $dQ = \mu dV$ où μ est la densité volumique de charges au point où est

centré ce volume. Sous l'effet d'un champ électrique \vec{E} , cette charge reçoit pendant dt le travail élémentaire $\delta W = \mu dV \vec{E} \cdot \vec{v} dt = (\vec{J} \cdot \vec{E}) dV dt$.

En notant que $I = JS$ et $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, la puissance reçue par unité de volume par effet Joule vaut :

$$u = \frac{\delta W}{dt dV} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$$

L'équation de la chaleur couplée avec la loi de Fourier s'écrit alors en régime permanent :

$$0 = - \frac{dJ_{Ex}}{dx} + u \text{ soit : } \frac{d^2 T}{dx^2} = - \frac{I^2}{\lambda \sigma S^2}$$

En notant $a = \frac{I^2}{\lambda \sigma S^2}$, cette équation différentielle s'intègre immédiatement en :

$$T(x) = - \frac{ax^2}{2} + bx + c$$

où b et c sont deux constantes d'intégration qu'on élimine en écrivant les conditions aux limites : $T_1 = T(x=0)$ et $T_2 = T(x=L)$.

Il vient après simplifications :

$$T(x) = - \frac{ax^2}{2} + \left[\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{aL}{2} \right] x + T_1$$

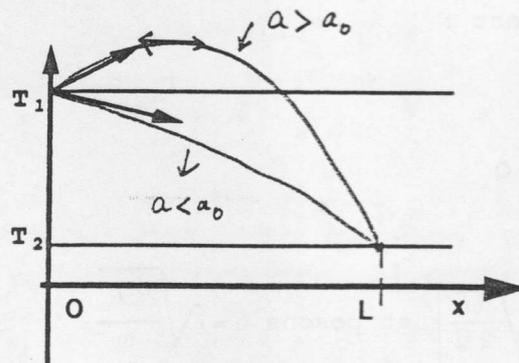
Le profil de température est parabolique. La pente à l'origine est donnée par le coefficient devant x .

On en déduit l'existence d'un maximum entre 0 et L si et seulement si :

$$a > \left[\frac{2[T_1 - T_2]}{L^2} \right] = a_0$$

Dans ce cas, l'échauffement du matériau l'emporte d'abord sur la conduction. De manière générale, on a une décroissance parabolique de la température plus douce que sans effet Joule.

Profil de température avec effet Joule.



IV: ETUDE DE REGIMES NON PERMANENTS

*** 4-1 : Onde de température.

On considère un sol homogène et conducteur thermique situé en $x > 0$. On considère que la variation journalière ou annuelle de température en surface (pour $x = 0$) est modélisable par une fonction sinusoïdale :

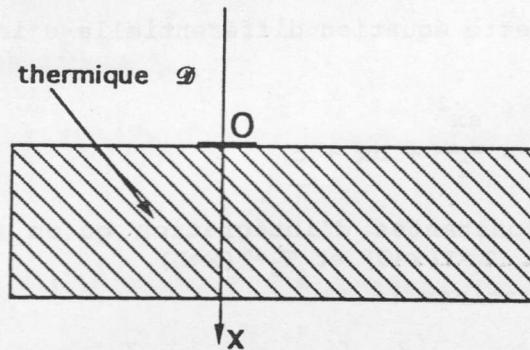
$$T(0,t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$$

(La variation est en fait périodique mais on ne garde que le premier harmonique de Fourier).

On associe à $T(0,t)$ le complexe $\underline{T}(0,t)$ où :

$$\underline{T}(0,t) = T_0 + T_1 \exp(j\omega t)$$

Sol de diffusivité thermique \mathcal{D}



On appelle \mathcal{D} la diffusivité thermique du sol. La température $T(x,t)$ au sein du sol vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On lui associe l'équation complexe :

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2}$$

On cherche une solution à l'équation de la forme : $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{T}_2(x) \exp(j\omega t)$.

On a alors $\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = j\omega \underline{T}_2(x) \exp(j\omega t)$ et $\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{d^2 \underline{T}_2}{dx^2} \exp(j\omega t)$. En injectant ceci dans

l'équation de la chaleur, il vient :

$$\frac{d^2 \underline{T}_2}{dx^2} - \frac{j\omega}{\mathcal{D}} \underline{T}_2(x) = 0$$

Notons alors que : $\frac{j\omega}{\mathcal{D}} = \left[(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2\mathcal{D}}} \right]^2$ et posons $\delta = \sqrt{\frac{2\mathcal{D}}{\omega}}$

L'équation de la chaleur s'écrit donc :

$$\frac{d^2 \underline{T}_2}{dx^2} - \left[\frac{(1+j)}{\delta} \right]^2 \underline{T}_2(x) = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$\underline{T}_2(x) = A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(\frac{jx}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(\frac{-jx}{\delta}\right)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration. La température devant rester finie dans le sol, on a forcément $A = 0$. On en déduit :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + B \exp\left[j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right] \exp\left[\frac{-x}{\delta}\right]$$

On détermine B en écrivant la condition au limite:

$$T_0 + T_1 \exp(j\omega t) = T_0 + B \exp(j\omega t) \text{ d'où } B = T_1$$

En repassant en notation réelle, il vient :

$$T(x,t) = T_0 + T_1 \cos\left[\omega t - \frac{x}{\delta}\right] \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right)$$

On a une onde de température amortie sur la longueur typique δ . Cela veut dire qu'au delà de quelques δ à l'intérieur du sol, la température est uniforme. On ne ressent plus les fluctuations temporelles de température.

A. H : Pour des variations journalières, on trouve $\delta = 7\text{cm}$. C'est l'épaisseur au delà de laquelle un sol ne gèle plus.

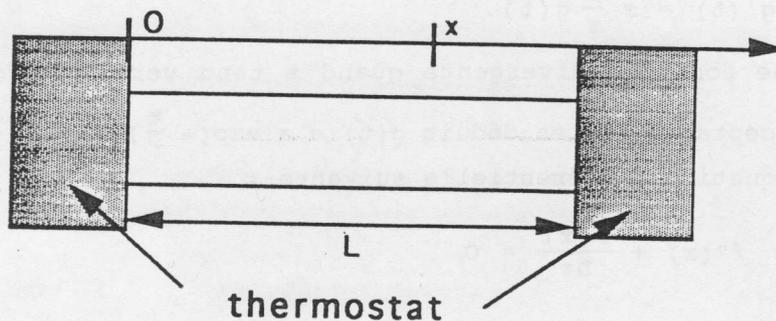
Pour des variations annuelles, on trouve $\delta = 1,40\text{ m}$. C'est la profondeur d'une bonne cave.

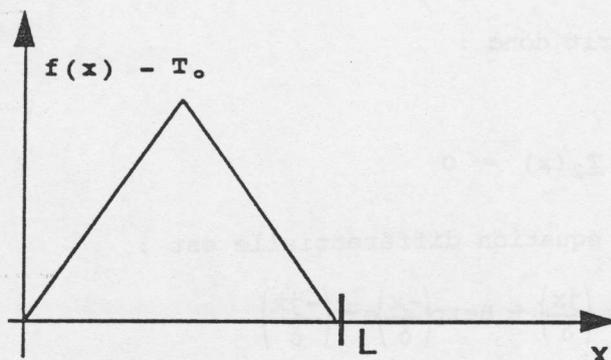
4-2 : Etude mathématique générale d'un système non permanent avec conditions aux limites.

On considère un conducteur thermique de diffusivité situé entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$, et infini selon les directions y et z . Le conducteur est en contact à ces deux extrémités avec un thermostat à la température T_0 .

A $t = 0$, le profil de température a une allure quelconque connue :

$$T(x,t=0) = f(x) \text{ avec } f(0) = f(L) = T_0.$$





Posons $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$, θ vérifie l'équation de la chaleur et les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0$$

Les équations aux dérivées n'étant pas simples à résoudre, il est d'usage de chercher une famille de solutions à variables séparées de la forme :

$$\theta(x,t) = f(x)g(t)$$

On en déduit alors avec des notations évidentes :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = f(x)g'(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = f''(x)g(t)$$

En injectant ceci dans l'équation de la chaleur, il vient :

$$f(x)g'(t) = \mathcal{D} f''(x)g(t)$$

$$\text{soit encore :} \quad \frac{g'(t)}{g(t)} = \mathcal{D} \frac{f''(x)}{f(x)}$$

L'égalité d'une fonction exclusivement de x et d'une fonction exclusivement de t ne peut se produire que si cette fonction est une constante.

Cette constante est ici homogène à l'inverse d'un temps. Nous la poserons égale à $\pm \frac{1}{\tau}$ où $\tau > 0$.

On a donc pour $g'(t)$ l'équation différentielle suivante :

$$g'(t) = \pm \frac{1}{\tau} g(t).$$

La valeur $\frac{1}{\tau}$ donne une fonction divergente quand t tend vers l'infini et est

donc physiquement inacceptable. On en déduit $g(t) = a \exp(-\frac{t}{\tau})$.

$f(x)$ vérifie alors l'équation différentielle suivante :

$$(1) \quad f''(x) + \frac{f(x)}{D\tau} = 0$$

Posons $l^2 = D\tau$ où l^2 est homogène à une longueur au carré.

La solution générale de (1) s'écrit :

$$f(x) = A' \cos\left(\frac{x}{l}\right) + B' \sin\left(\frac{x}{l}\right)$$

La solution à variables séparés est donc de la forme :

$$\theta(x,t) = \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \left[A' \cos\left(\frac{x}{l}\right) + B' \sin\left(\frac{x}{l}\right) \right]$$

où A' et B' sont deux constantes d'intégration.

Il est clair que cette fonction n'est pas la solution du problème car, à $t = 0$, elle ne peut, à l'évidence, s'identifier à la fonction $f(x) - T_0$ de départ.

Peut-elle en revanche vérifier les deux conditions aux limites du problème ?

Ecrivons ces deux conditions :

$$\theta(0,t) = 0 \text{ implique } A = 0 \text{ et } \theta(L,t) = 0 \text{ implique } B \sin\left(\frac{L}{l}\right) = 0.$$

La solution triviale $A = B = 0$ n'ayant aucun intérêt, nous en déduisons que les valeurs de l doivent être quantifiées et vérifier : $L = p\pi l$ où p est a priori un entier relatif. Finalement, les solutions à variables séparées vérifiant les conditions aux limites sont des fonction indicées du type :

$$\theta_p(x,t) = B_p \exp\left[-\frac{p^2 \pi^2 \mathcal{D}}{L^2} t\right] \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$$

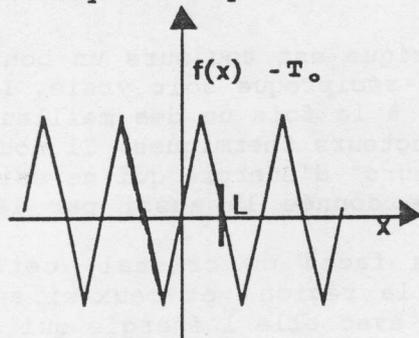
Les fonctions θ_p et θ_{-p} étant en fait équivalentes (il suffit de changer le signe de la constante B_p), on peut se restreindre pour p aux entiers naturels. On admet alors que les fonctions $\theta_p(x,t)$ forment une base des solutions du problème posé, c'est à dire que la solution doit pouvoir s'écrire :

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[B_p \exp\left[-\frac{p^2 \pi^2 \mathcal{D}}{L^2} t\right] \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \right]$$

Les inconnues B_p s'obtiennent en écrivant la condition initiale, soit :

$$f(x) - T_0 = \sum_{i=1}^{i=\infty} B_p \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$$

On reconnaît ici le développement en série de Fourier de la fonction $f(x) - T_0$ rendue périodique et impaire :



Les mathématiques nous apprennent alors que :

$$B_p = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} (f(x) - T_0) \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx$$

Le problème est donc maintenant totalement résolu. Il suffira de calculer ces intégrales !! En fait, il est souvent inutile de calculer tous les coefficients B_p car les termes de rang p élevés s'évanouissent très rapidement dans le temps. Au bout d'une durée raisonnable, il ne reste que le terme de rang 1 qui ait un poids conséquent dans la solution au problème. On a donc rapidement :

$$\theta(x,t) \approx B_1 \exp\left[-\frac{\pi^2 \mathcal{D}}{L^2} t\right] \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Tous les harmoniques de Fourier de rang élevé qui font la richesse du profil initial se sont évanouis et le fondamental s'atténue avec une constante de temps T_{diffus} de l'ordre de $\frac{L^2}{\pi^2 \mathcal{D}}$ (on retrouve au passage l'interprétation physique de la diffusivité).

V: ETUDE MICROSCOPIQUE DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE

5-1 : Cas des solides :

5-1.1 : Cas des métaux.

Nous savons par expérience que les métaux sont de bons conducteurs électriques et thermiques. C'est pour cela qu'on utilise, entre autres choses, des casseroles en aluminium. La loi de Wiedemann et Franz (1853) constate la proportionnalité, pour un métal donné, entre la conductivité thermique λ et la conductivité électrique σ avec une constante de proportionnalité L qui dépend très peu du métal ou des conditions thermodynamiques extérieures.

$$\text{Loi de Wiedemann-Franz : } \frac{\lambda}{\sigma} = L T$$

Cette loi semble montrer que les phénomènes de conduction électrique et thermiques sont très liés. En particulier, on peut raisonnablement penser que dans les deux cas, ce sont les électrons libres du métal qui assurent le phénomène de transport, qu'il s'agisse de charges électriques ou d'énergie.

5-1-2 : Cas des isolants électriques.

S'il est vrai qu'un conducteur électrique est toujours un bon conducteur thermique. Il serait faux de penser que la réciproque soit vraie. L'exemple le plus frappant est celui du diamant qui est à la fois un des meilleurs isolants électriques et aussi un des meilleurs conducteurs thermiques. Il nous faut donc admettre dans ce cas, l'existence "de porteurs" d'énergie qui ne soient pas des électrons libres. L'explication peut être donnée là aussi par le modèle de solide d'Einstein.

Si on élève la température d'une des faces du cristal, cette énergie thermique est distribuée aux ressorts de la région et ceux-ci se mettent à vibrer plus fort. Cette vibration, et donc avec elle l'énergie qui en résulte, est transmise à l'ensemble du cristal via les forces atomiques. Ce sont donc ici les vibrations thermiques qui assurent le transport de l'énergie.

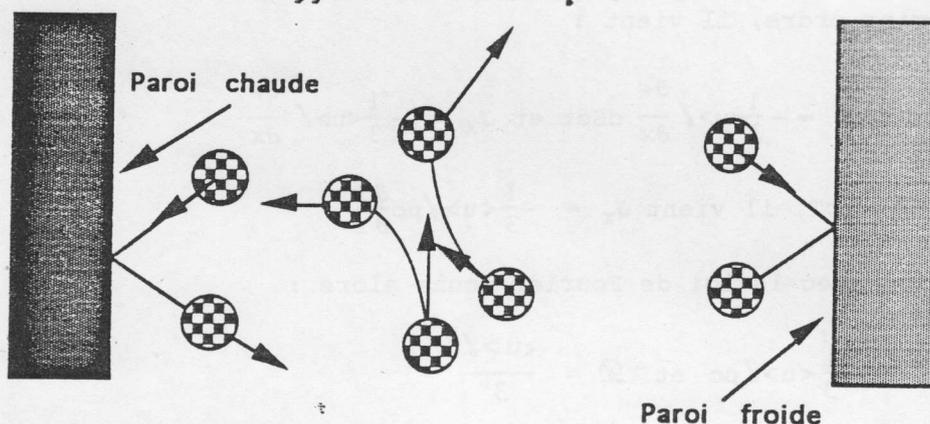
5-2 : Cas des gaz.

5-2-1 : Explication qualitative de la conductivité thermique.

La conductivité thermique des gaz et plus généralement des milieux dilués, est très faible vis à vis de celles des métaux car le nombre de porteurs (transporteurs ?) d'énergie par unité de volume est beaucoup plus faible. Là encore, comme dans la diffusion, ce sont les chocs entre particules qui assurent le transport d'énergie.

Le processus de transmission d'une paroi chaude vers une paroi froide est le suivant : des molécules entrent en collision avec la paroi chaude et repartent avec une énergie supérieure pour entrer en collision avec d'autres molécules plus "froides". En fin de compte, des molécules entrent en collision avec la paroi froide en lui cédant l'excès d'énergie.

Diffusivité thermique.



5-2-2 : Modèle de diffusion thermique.

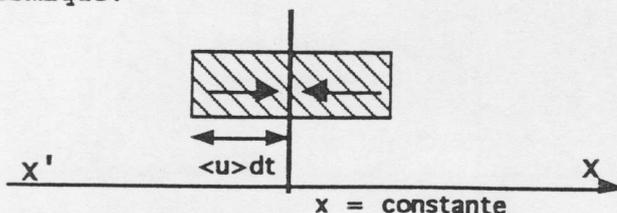
5-2-2-1 : Présentation du modèle.

Nous allons développer un modèle de diffusion de l'énergie assez proche du modèle d'Einstein développé au chapitre précédent.

On s'intéresse aux molécules qui atteignent exactement un plan $x = \text{constante}$ dans un problème unidimensionnel où la température ne dépend que de x . Ces molécules sont celles qui se trouvaient à une distance l du plan où l est le lpm des molécules du gaz. Si on appelle $e(x,t)$ l'énergie volumique en x à la date t , les molécules qui arrivent exactement sur le plan correspondait donc à une densité d'énergie $e(x \pm l)$.

On considère enfin que le module de la vitesse des molécules du gaz est constant et vaut $\langle u \rangle$.

Si on considère que les trois directions et les trois sens de l'espace sont statistiquement équivalents, $\frac{1}{6}$ environ des molécules ont le bon sens et la bonne direction pour arriver sur la surface. On prend $x'x$ pour sens positif de la diffusion thermique.



En amont du plan, il entre au travers de dS pendant la durée dt , l'énergie :

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{6} \{ \langle u \rangle dSe(x-l) \} dt$$

En aval du plan, il sort au travers de dS pendant la durée dt , l'énergie :

$$d\varepsilon_2 = \frac{1}{6} \{ \langle u \rangle dSe(x+l) \} dt$$

L'énergie qui traverse algébriquement la surface dS pendant dt vaut donc :

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{6} \langle u \rangle dS \{ e(x-l) - e(x+l) \} = J_x dS dt$$

où J_x est le vecteur densité de courant d'énergie. En faisant un développement limité au premier ordre, il vient :

$$d\mathcal{E} = -\frac{1}{3} \langle u \rangle l \frac{\partial e}{\partial x} dS dt \text{ et } J_x = -\frac{1}{3} \langle u \rangle l \frac{\partial e}{\partial x}$$

En notant que $e = \rho c T$, il vient $J_x = -\frac{1}{3} \langle u \rangle l \rho c \frac{\partial T}{\partial x}$

L'identification avec la loi de Fourier donne alors :

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle u \rangle l \rho c \text{ et } \mathcal{D} = \frac{\langle u \rangle l}{3}$$

On retrouve pour la diffusivité thermique une expression rigoureusement identique à celle de la diffusion.

5-2-2-2: Résultats et commentaires pour le gaz parfait.

Nous avons déjà vu que pour un gaz parfait $l \propto \frac{T}{P}$ et $\langle u \rangle \propto \sqrt{\frac{T}{M}}$. L'équation d'état s'écrit $P = \frac{\rho R T}{M}$ et, en général, c dépend peu de la température. On en déduit alors les variations de λ en fonction des paramètres du problème.

$$\lambda \propto \sqrt{\frac{T}{M}}$$

La conductivité augmente avec la température ce qui est naturel compte tenu des explications qualitatives précédentes. On aboutit par ailleurs au résultat extraordinaire que la conductivité du gaz ne dépend pas de sa pression. Cela peut se justifier en ce sens où l'augmentation de pression augmente en moyenne le nombre de chocs mais diminue d'autant le lpm des particules de sorte qu'elle n'intervient pratiquement pas dans le phénomène de diffusion de l'énergie.